Alq J Sci. 2026;2(1):95-114
https://doi.org/10.69667/ajs.26108

Alqalam Journal of Science
مجلـــة القلم للعلـوم
https://alqalam.utripoli.edu.ly/index.php/AR

التماثل وزمر لي وتطبيقاتها في الفيزياء النظرية

عيشة عياد عبد السلام محمد

قسم الرياضيات، كلية العلوم، جامعة طرابلس، طرابلس، ليبيا
aishaayad816@gmail.com

الملخص

إن أهمية زمر التماثل في الفيزياء في كونها تمثل مفهوم رياضي يستخدم لوصف التحويلات التي تبقى المنظومة الفيزيائية دون تغير، وهذه التحويلات تشمل الدوران والانتقال والانعكاس أو التحويلات في الفضاء والزمن. وتُعد زمر التماثل أداة مهمة لفهم القوانين الفيزيائية وللتبسيط الرياضي. وتحتوي زمر التماثل على أنواع هي: زمرة الدوران التي تصف التماثلات الدورانية في الفضاء الثلاثي الأبعاد، وزمر لي: التي تصف التحويلات المستمرة وتعبر عن التماثلات التي تعتمد على البارمترات المستمرة، وتستخدم في دراسة المنظومة الكمية والنسبية كما تعتبر مهمة في فهم خصائص الأنظمة الفيزيائية المختلفة والكشف عن القوانين الأساسية للطبيعة، وتحديد التماثلات في الفيزياء يقود إلى حفظ قوانين معينة، فعلى سبيل المثال: حفظ الزخم الخطي الناتج عن التماثل الانتقالي. وحفظ الزخم الزاوي الناتج عن التماثل الدوراني، وحفظ الطاقة الناتجة عن التماثل الزمني، وفي النسبية الخاصة هنا تُستخدم زمر لورنتز في وصف التماثلات المتعلقة بالفضاء والزمن. وأيضًا تُستخدم في تصنيف الجسيمات الأولية والحالات الفيزيائية المختلفة، فمثلًا في فيزياء الجسيمات تُستخدم زمر التماثل **SU(3)** لتصنيف الباريونات والميزونات. بالإضافة إلى ذلك، تعمل بالخواص الفيزيائية، وتساعد على التنبؤ بمستويات الطاقة في الأنظمة الكمومية، مما يجعلها أداة قوية في دراسة الأنظمة الفيزيائية.

كلمات مفتاحية. التماثل في الفيزياء, زمر لي(Lie Groups), جبر لي(Lie Algebra) , التماثل المستمرة, نظرية الزمر, حفظ الكميات الفيزيائية, مبرهنة نويثر.

Abstract

The importance of symmetry groups in physics lies in their role as a mathematical concept used to describe transformations that leave a physical system unchanged. These transformations include rotation, translation, reflection, and transformations in space and time. Symmetry groups are considered a fundamental tool for understanding physical laws and for mathematical simplification. They encompass several types, such as the rotation group, which describes rotational symmetries in three-dimensional space, and Lie groups, which describe continuous transformations and represent symmetries dependent on continuous parameters. Lie groups are widely used in the study of quantum and relativistic systems and are essential for understanding the properties of different physical systems and uncovering the fundamental laws of nature. Identifying symmetries in physics leads to the conservation of specific quantities; for example, translational symmetry results in the conservation of linear momentum, rotational symmetry results in the conservation of angular momentum, and temporal symmetry results in the conservation of energy. In special relativity, Lorentz groups are employed to describe symmetries related to space and time. Symmetry groups are also used in classifying elementary particles and different physical states; for instance, in particle physics, the SU(3) symmetry group is applied to classify baryons and mesons. Moreover, symmetry groups interact with physical properties and aid in predicting energy levels in quantum systems, making them a powerful tool in the study of physical systems.

Keywords: *Symmetry in physics, Lie groups, Lie algebra, continuous symmetry, group theory, conservation laws, Noether's theorem.*

1.1 المقدمة

تعتبر كل مجموعة من الأجسام أو الأشياء المتماثلة إذا وُجدت قاعدة تحويل تبقى المجموعة دون أي تغيُّر. فالتماثل الهندسي لمجموعة من النقاط يتمثل في بقاء النقاط على حالتها إذا ما تم إحداث دوران أو انعكاس[2] ؛ أما بالنسبة للتماثل الفيزيائي فيتعلق الأمر ببقاء المعادلات أو القوانين الفيزيائية دون تغير عندما يحدث تغير في الإحداثيات، كما هو الحال بالنسبة لقانون نيوتن الثاني الذي يبقى حاملا الصيغة نفسها لو قمنا بتحويل الإحداثيات في إطار تحويلات جاليليو [3].التماثل والحفظ هما مفهومان أساسيان في الفيزياء يرتبطان مع بعضهما البعض، و يشير التناظر إلى ثبات النظام تحت

Received*: 20-11-2025 -* ***Accepted****: 18-01-2026 -* ***Published****: 24-01-2026*

Alq J Sci. 2026;2(1):95-114
https://doi.org/10.69667/ajs.26108
Alqalam Journal of Science
مجلة القلم للعلوم
https://alqalam.utripoli.edu.ly/index.php/AR

تحويلات معينة، مثل الدوران، أو الانتقال أو الانعكاس، فعلى سبيل المثال: قوانين الفيزياء ثابتة تحت تحويلات مكانية، مما يعني أن القوانين هي نفسها بغض النظر عن مواقعها في الفضاء. وأشهر قوانين الحفظ في الفيزياء قانون حفظ الطاقة، وقانون حفظ الزخم الخطي، وقانون حفظ الزخم الزاوي، وترتبط هذه القوانين ارتباطا وثيقا بالتماثلات الأساسية للنظام، وتنص (نظرية نوثر) على أن لكل تناظر مستمر لقوانين الفيزياء، هناك قانون حفظ مناظر له فعلى سبيل المثال يؤدي التماثل الانتقالي في الفضاء إلى الحفاظ على الزخم الخطي، ويؤدي التماثل الانتقالي الزمني الى الحفاظ على الطاقة، والتماثل الدوراني يؤدي إلى حفظ الزخم الزاوي كما في الجدول (1.1) [5,4].

2. أنواع زمر التماثل

وتنقسم زمر التماثل إلى:

2.1 التماثل المنفصل

التماثل المنفصل هو بقاء منظومة ما دون تغير تحت تأثير مجموعة من التحويلات المنتهية[6] فمثلا:

1. الانعكاس في R^3 $\sigma: \vec{x} \rightarrow \overrightarrow{-x}$ ويدل على انعكاس النقاط بالنسبة إلى نقطة الأصل.
2. التماثل الناتج عن مجموعة من الدورانات بزاوية $\frac{2p\pi}{n}$ لمضلع منتظم D_n بعدد رؤوس n على الصورة التالية:

$$R_P = \begin{pmatrix} \cos\frac{2p\pi}{n} & -\sin\frac{2p\pi}{n} \\ \sin\frac{2p\pi}{n} & \cos\frac{2p\pi}{n} \end{pmatrix} \quad , p = 0,1,2 \dots n-1 \qquad (1.1)$$

وبما أن مصفوفة R_P تحقق شرط $R_P^T R_P = I$، وحيث أن R_P^T هي محورة المصفوفة R_P، $\det R = 1$ ، وتُعرف بزمرة الدوران، كما نلاحظ أن $S_p = PR_p$ تحقق العلاقة $S_p^T S_p = I$ ولكن $\det S_p = -1$ يسمى بالدوران غير النقي حيث أن: $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

3. الانعكاس الزمني $\alpha: \vec{t} \rightarrow -\vec{t}$ ويعني إمكانية العودة إلى الوراء في الزمن في وصف معادلات الحركة للأجسام والجسيمات.[7]

2.2 التماثل المستمر

التماثل المستمر هو التماثل الذي يمكن تمثيله بزمر تحتوي على عدد لانهائي من العناصر، حيث يتواجد بارامتر يتغير باستمرار في نطاق معين، والتغير المستمر للبارامتر يسبب في استمرار عناصر الزمرة كأن تعتمد عناصر الزمرة على زاوية الدوران التي تتغير في النطاق $[0,2\pi]$، مع ملاحظة أن عناصر الزمر قد تحتوي على بارامتر واحد أو أكثر؛ فعلى سبيل المثال يحتوي المثلث على التماثل الدوراني المنفصل لأن عمليات التماثل تم تصنيفها بواسطة بارامتر متغير بشكل منفصل أي بمضاعفات $120°$ بينما الدائرة لها عدد لانهائيًا من التماثلات خلافاً للمربع والمثلث المتساوي الاضلاع كما في الشكل (1.1) فمثلا التماثل المستمر هما [9،8]

i. تماثل دالة الموجة في الميكانيكا الكم [6].

$$\varphi(\vec{x}, t) = e^{i\alpha}\varphi(\vec{x}, t) \qquad (2.1)$$

تحتوي تحويلة دالة الموجة على بارامتر واحد هي α مما يدل على أن هذا التماثل هو تماثل مستمر.

ii. تحويلة بوا نكري

وتمثل علاقة الاحداثيات بين الفضاء والزمن لأنظمة القصور الذاتي في الميكانيكا النسبية وهي على النمط التالي:

$$x'^{\mu} = \Lambda_{\nu}^{\mu} x^{\nu} + a^{\mu} \qquad (3.1)$$

حيث أن Λ_{ν}^{μ} تحويلة لورنتز، وa^{μ} تحويلة الفضاء والزمن[6].

iii. تحويلة لورنتز [7]

Received: 20-11-2025 - **Accepted**: 18-01-2026 - **Published**: 24-01-2026

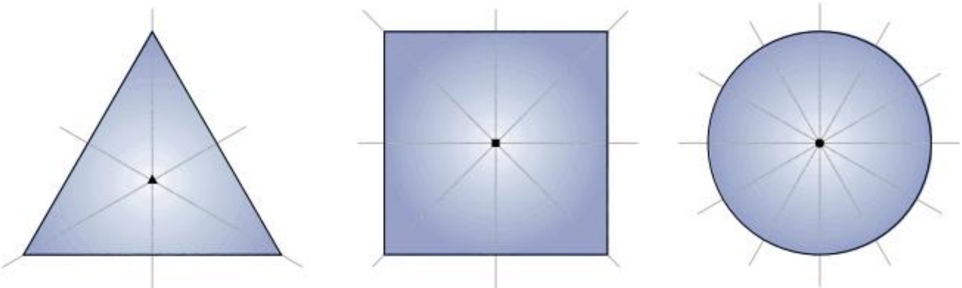
Alq J Sci. 2026;2(1):95-114
https://doi.org/10.69667/ajs.26108
Alqalam Journal of Science
مجلـــة القلم للعلـوم
https://alqalam.utripoli.edu.ly/index.php/AR

$$x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\nu} x^{\nu} \qquad (4.1)$$

حيث أن Λ^{μ}_{ν} مصفوفة من الرتبة 4×4

iv. مصفوفة الدوران في الفضاء الثلاثي الأبعاد هي:

$$x^{\mu} \rightarrow x'^{i} = R^{i}_{j} x^{j} \qquad i, j = 1,2,3 \qquad (5.1)$$



الشكل (1.1) يوضح الاشكال الهندسية للتماثل.

2.3 الزمر المتعامدة $SO(3)$

إن مجموعة المصــفوفات الحقيقة المتعامدة من الرتبة $n \times n$ تكوّن زمرة وتسـمى بالزمر المتعامدة $SO(n)$ وهذه المصــفوفات من الرتبة $n \times n$ يكون لها $\frac{n(n-1)}{2}$ بارامترا مستقلا، فعندما $n = 2$ يوجد بارامتر مستقل واحد (زاوية دوران واحدة θ) وتكتب المصفوفة على الصورةالتالية:

$$R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \qquad (6.1)$$

وعندما $n = 3$ توجد ثلاثة بارامترات مستقلة (زوايا اويلر في ثلاثة أبعاد).

وبعض المصـــفوفات الحقيقية المتعامدة من الرتبة 3×3 والتي محددها يســاوي $+1$ يرمز لها بالرمز $SO(3)$ ، وتكون الصــورة العامة لهذه المصفوفات على النحو التالي:

$$R_x(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & \sin\alpha \\ 0 & -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \qquad (a.7.1)$$

$$R_y(\beta) = \begin{pmatrix} \cos\beta & 0 & \sin\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\beta & 0 & \cos\beta \end{pmatrix} \qquad (b.7.1)$$

$$R_z(\gamma) = \begin{pmatrix} \cos\gamma & \sin\gamma & 0 \\ -\sin\gamma & \cos\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad (c.7.1)$$

ولو رمزنا لزوايا اويلر بالرموز $\{\alpha, \beta, \gamma\}$ فإن أي عنصر ينتمي إلى $SO(3)$ يمكن كتابته على الصورة التالية [8].

$$R(\alpha, \beta, \gamma) = R_x(\alpha) R_y(\beta) R_Z(\gamma) \qquad (8.1)$$

3.المصفوفات الهرميشية والمصفوفات الواحدية الخاصة

في الميكانيكا التقليدية تكون المصفوفات ذات عناصر حقيقية، ولكن عندما ننتقل الى مجال ميكانيكا الكم نجد أن المصفوفات ذات عناصر مركبة، وبذلك نحتاج هنا لعرض بعض المفاهيم المهمة [1]:

1) يكون مرافق العنصر المركب A على صورة A^* حيث $i \rightarrow -i$.

2) تعرف المصفوفة المتاخمة $A^{\dagger}$ (adjoint) على النحو التالي:

***Received**: 20-11-2025 - **Accepted**: 18-01-2026 - **Published**: 24-01-2026*

Alq J Sci. 2026;2(1):95-114
https://doi.org/10.69667/ajs.26108
Alqalam Journal of Science
مجلـــة القلم للعلـوم
https://alqalam.utripoli.edu.ly/index.php/AR

$$A^{\dagger} = (A^{*})^{T}$$

أي أن $A^{\dagger}$ هي عبارة عن محورة مرافق المصفوفة A.

3) نقول عن المصفوفة بأنها مصفوفة هرميشية إذا كانت $A^{\dagger} = A$ أي أن:

$$A^{\dagger} = (A^{*})^{T} = A$$

4) نقول إن المصفوفة واحدية إذا كانت $A^{\dagger} = A^{-1}$.

3.1 المصفوفات الواحدية (مصفوفات بولي وديراك)

من المصفوفات المهمة في مجال الفيزياء أربع مصفوفات من الرتبة 2×2 تعرف كالآتي:

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \ ,\sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \ \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \ \sigma_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

وهي مصفوفات بولي وتحقق الخواص الاتية [1]:

1. $\sigma_1{}^2 = \sigma_2{}^2 = \sigma_3{}^2 = I_2$
2. $\sigma_1\sigma_2 = i\sigma_3 \quad , \quad \sigma_2\sigma_3 = -\sigma_3 \ ,\sigma_3\sigma_1 = -i\sigma_2$
3. $\sigma_i\sigma_j + \sigma_j\sigma_i = 2\delta_{ij}I_2$

حيث أن I_2 مصفوفة الوحدة من الرتبة 2×2 تحقق مصفوفات باولي العلاقة التبديلية.

$$[\sigma_i, \sigma_j] = \sigma_i\sigma_j - \sigma_j\sigma_i = 2i\varepsilon_{ijk}\sigma_k$$

ويمكن كتابتها كتركيبة خطية من المصفوفات الثلاثة:

$$h = \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{pmatrix} = x\sigma_1 + y\sigma_2 + z\sigma_3 = \begin{pmatrix} z & x+iy \\ x-iy & -z \end{pmatrix}$$

وتستخدم هذه المصفوفات في الدراسات الفيزيائية وخصوصا بميكانيكا الكم عند تناول النظرية النسبية للإلكترون أو لأي جُسيم بكمية الحركة المغزلية (Spin) تساوي $\frac{1}{2}$.

4. زُمر لي Lie groups

نرمز لزمر لي بالرمز G هي مجموعة من العناصر ذات البُعد n التي تحقق الشروط التالية [10] :

I. تشكل زمرة.

II. تمثل φ تحليلية ومتعددة الطية (analytic manifold) من البُعد n؛ مما يعني أنها قابلة للاشتقاق

III. لأي عنصرين a, b من زمرة لي G فإن:

$$\varphi : G \times G \to G \ , \quad \varphi(a\,,b) = a.b$$

IV. لأي عنصر $a \in G$ فإن:

$$\varphi \ : G \to G \quad ,\varphi(a) = a^{-1}$$

5 الأبعاد Dimensions

تصف عدد البارامترات المستقلة لزمرة لي [11] .

5.1 زمر لي الخطية Linear Lie Groups

تعد زمر لي ذات أهمية كبيرة في التطبيقات الفيزيائية وتعرف باسم زمر لي الخطية، ويمكن تعريفها كالاتي:

ليكن V الفضـــاء الاتجاهي من البعد nعلى المجال F بحيث يكون المجال إما الأعداد الحقيقية أو الأعداد المركبة والصـــورة العامة للزمر الخطية هي مجموعة كل المصفوفات المربعة من الرتبة $n \times n$ غير الشادة وتكتب كالتالي[10] :

$$GL(n, F) = \{A \ : \ \det A \neq 0\}$$

Received: 20-11-2025 - Accepted: 18-01-2026 - Published: 24-01-2026

Alq J Sci. 2026;2(1):95-114
https://doi.org/10.69667/ajs.26108
Alqalam Journal of Science
مجلة القلم للعلوم
https://alqalam.utripoli.edu.ly/index.php/AR

وبُعد الزُمر الخطية على مجال الأعداد الحقيقية هو n^2 أما على مجال الأعداد المركبة فهو $2n^2$.

5.2 الزمر الخطية الخاصة Special Linear groups

تُعرّف الزُمر الخطية الخاصة كالتالي[12] :

$$SL(n) = \{ A \in GL(n) \ : \ detA = 1 \}$$

وهذا يعني أن $SL(n)$ زمرة جزئية من زمرة لي الخطية $GL(n)$ وزُمر جزئية تكون كالتالي:

$$SL(n, R) \subset GL(n, R) \subset SL(n, \not{C}) \supset GL(n, \not{C}) \qquad (8.1)$$

أي أن:

$$SL(n, R) \subset SL(n, \not{C})$$

بُعد الزُمر الخطية الخاصة بمجال الأعداد الحقيقية هو $n^2 - 1$ أما الأعداد المركبة فهو $2n^2 -$

5.3 الزمر المتعامدة Orthogonal groups

نعتبر المقياس الإقليدي أو الصيغة الثنائية المتماثلة في R^n[12].

ولنفرض أن $X, Y \epsilon R^n$ $X = (x_1, x_2, \dots x_n)$ و $Y = (y_1, y_2, \dots y_n)$ و I_n المصفوفة المحايدة من الرتبة $n \times n$ فإن:

$$\langle X, Y \rangle = X^T I_n Y = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \qquad (9.1)$$

$$(x_1, x_2, \cdots x_n) \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = (x_1, x_2, \cdots x_n) \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots x_n y_n$$

$$= \sum_{j=1}^{n} x_j y_j \qquad (10.1)$$

حيث إن X^T هي محورة المصفوفة X و I_n مصفوفة الوحدة من الرتبة $n \times n$. كما أن:

$$O(n) = \{A \in G(L(n, R)) : A^T A = I_n\} \qquad (11.1)$$

ونفرض أن $X, Y \epsilon R^n$ لذلك فإن $\langle X, Y \rangle$ الضرب القياسي في R^n، ونعرف الزمر المتعامدة.

$$\langle Ax, Ay \rangle = (Ax)^T Ay = x^T A^T Ay = x^T I_n y = x^T y \qquad (12.1)$$

حيث إن $A^T A = I_n$ تحت الشرط $detA = 1$ وتعرّف بالزُمر المتعامدة الخاصة.

$$SO(n) = \{ A \in O(m) \ : \ detA = 1 \} \qquad (13.1)$$

ونلاحظ بعد المصفوفة المتعامدة $O(n)$ والمصفوفة المتعامدة الخاصة $SO(n)$ هو $\frac{n(n-1)}{2}$.

5.4 الزُمر الواحدية Unitary Groups

الصيغة الهرميشية المتماثلة في مجال الأعداد المركبة[12] .

نفرض أن $X, Y \epsilon C^n$ هي $X = (x_1, x_2, \dots x_n)$ و $Y = (y_1, y_2, \dots y_n)$

و I_n هي المصفوفة المربعة المحايدة من الرتبة $n \times n$ بذلك فإن:

Received: 20-11-2025 - **Accepted**: 18-01-2026 - **Published**: 24-01-2026

Alq J Sci. 2026;2(1):95-114
https://doi.org/10.69667/ajs.26108
Alqalam Journal of Science
مجلة القلم للعلوم
https://alqalam.utripoli.edu.ly/index.php/AR

$$\langle X , Y\rangle = X^{\dagger}I_nY = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}^{\dagger} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

$$= (x_1^* , x_2^* , \ldots x_n^*) \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

$$(x_1^* , x_2^* , \ldots x_n^*) \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = x_1^*y_1 +, x_2^*y_2 + \ldots + x_n^*y_n$$

$$= \sum_{j=1}^{n} x_j^* y_j \qquad (14.1)$$

أي أن A^* هي عناصر المرافقة لـ A ، وتُعرف الزُمر الواحدية كالتالي:

$$U(n) = \{A \in GL(n , \mathbb{C}) : A^*A = I_n\} \qquad (15.1)$$

لتكن $X , Y \in \mathbb{C}^n$ فإن

$$\langle Ax , Ay\rangle = (Ax)^*Ay = x^*A^*Ay = x^*I_ny = x^*y$$

لكل $X , Y \in \mathbb{C}^n$ حيث إن $A^*A = I_n$ تحت شرط أن $detA = 1$ وتُعرف الزُمر الواحدية الخاصة $SU(n)$ كالتالي:

$$SU(n) = \{ A \in U(n) : detA = 1 \} \subset U(n) \qquad (16.1)$$

بُعد الزمر الواحدية هو n^2 أما بُعد الزُمر الواحدية الخاصة فهو $n^2 - 1$ [12].

5.5 الزُمر المتعامدة الزائفة Pseudo Orthogonal groups

نعمم الزمر المتعامدة $O(m, n)$ التي تلعب دوراً مهما في النسبية الخاصة، وهي من ضمن تطبيقاتها تحويلة لورنتز في مجال الأعداد الحقيقية، ونلاحظ من التعريف $AA^T = I$ للزُمر المتعامدة، ويمكننا إعادة كتابتها كالتالي: $ALA^T = L$ ؛ لذلك فإن التحويلات المتعامدة تحافظ على الصيغة ثنائية الخطية المتماثلة.

حيث أن L المصفوفة المربعة من الرتبة $n \times n$ وتُعرّف كالتالي:

$$L = \begin{pmatrix} -I_P & 0 \\ 0 & I_{n-p} \end{pmatrix}$$

حيث I_P مصفوفة الوحدة من الرتبة $p \times p$.

ولنفرض أن $X , Y \in \mathbb{C}^n$ فإن:

$$\langle X , Y\rangle = X^TLY = X^T \begin{pmatrix} -I_P & 0 \\ 0 & I_{m-p} \end{pmatrix} Y = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} -I_P & 0 \\ 0 & I_{n-p} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

Received*: 20-11-2025 -* ***Accepted****: 18-01-2026 -* ***Published****: 24-01-2026*

Alq J Sci. 2026;2(1):95-114
https://doi.org/10.69667/ajs.26108
Alqalam Journal of Science
مجلة القلم للعلوم
https://alqalam.utripoli.edu.ly/index.php/AR

$$= (x_1, x_2, \cdots x_p, x_{p+1}, x_n)\begin{pmatrix} -I_p & 0 \\ 0 & I_{n-p} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_p \\ y_{p+1} \\ y_n \end{pmatrix}$$

$$= (-x_1, -x_2, \cdots - x_p, x_{p+1} \dots x_n)\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_p \\ y_{p+1} \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

$$= -x_1y_1 - x_2y_2, \dots - x_py_p + x_{p+1}y_{p+1} \dots + x_ny_n$$

$$= -\sum_{j=1}^{p} x_jy_j + \sum_{j=p+1}^{n} x_jy_j \qquad (17.1)$$

وتُعرف الزُمر المتعامدة الزائفة كالتالي:

$$O(p, n-p) = \{A \in GL(n, R):\ A^TLA = L\} \qquad (18.1)$$

ونفرض أن $X, Y \in \mathbb{R}^n$ ، عندئذ فإن:

$$\langle Ax, Ay\rangle = (Ax)^TL(Ay) = x^TA^TLAy = x^TLy \qquad (19.1)$$

لكل $X, Y \in \mathbb{C}^n$ حيث $A^TLA = L$ بالشرط أن $detA = 1$ وتُكتب على الصيغة الاتية:

$$SO(p, n-p) = \{A \in GL(m, R):\ detA = 1\} \subset O(p, n-p)$$

وتسمى بالزُمر المتعامدة الخاصة الزائفة.

كما نلاحظ أن بُعد الزُمر المتعامدة الزائفة $O(n, n-p)$ والزُمر المتعامدة الخاصة $SO(p, n-p)$ هو نفس بُعد الزمر المتعامدة وهو $\frac{n(n-1)}{2}$ (التي سبق الإشارة إليها)[12].

6.1 جبر لي

ليكن $\mathcal{L}$ جبر لي هو فضاء اتجاهي على المجال F إما (أعدادا حقيقية أو أعدادا مركبة) مع العملية الثنائية $[.,.]: \mathcal{L} \times \mathcal{L} :\rightarrow \mathcal{L}$ يسمى بقوس لي Lie bracket أو التبديل commutator ويعرف بالخصائص التالية[15,14] :

I. الانغلاق Closure

لتكن $X, Y \in L$ بالتالي فإن $[X, Y] \in L$

II. الثنائية Bilinearity

$$[X, \alpha Y + \beta Z] = \alpha[X, Y] + \beta[X, Z] \quad \forall X, Y, Z \in L \ \ \alpha, \beta \in F$$

III. التواء التماثل Antisymmetric

$$[X, Y] = -[Y, X]$$

IV. المحايد الجاكوبي Jacobi identity

$$[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0 \ \forall \ X, Y\, Z \in L.$$

Received*: 20-11-2025 -* ***Accepted****: 18-01-2026 -* ***Published****: 24-01-2026*

Alq J Sci. 2026;2(1):95-114
https://doi.org/10.69667/ajs.26108
Alqalam Journal of Science
مجلـــة القلم للعلـوم
https://alqalam.utripoli.edu.ly/index.php/AR

1.6.1 جبر لي تبديلي Abelian lie algebra

ويعرف جبر لي تبديلي إذ ا تحقق الشرط $[x, y] = 0$ لكل $x , y \in$ [10].

7.1 مصفوفة الدالة الأسية

الصيغة الأسية للمصفوفة A المربعة من الرتبة $n \times n$ تعطى بصورة متسلسلة، والتي تقترب من المصفوفة A من الرتبة $n \times n$ أي أن [10] :

$$e^{A} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{A^{k}}{k!} \qquad (20.1)$$

ونذكر أن متسلسلة المصفوفات من الرتبة $n \times n$ $\sum_{k=1}^{\infty} A^{k}$ تقترب إلى المصفوفة A من الرتبة $n \times n$ إذا كانت فقط متسلسلة عناصر المصفوفة $\sum_{k=1}^{\infty}(A_{rs})^{k}$ تقترب إلى المصفوفة A_{rs}

لكل $r, s = 1,2, \dots m$. ومصفوفة الدالة الأسية لها خصائص تتمثل في:

i. $(e^{A})^{T} = e^{A^{T}}$

ii. $(e^{A})^{-1} = e^{-A}$

iii. $\det(e^{A}) = e^{Tra(A)}$

iv. $e^{0} = I$ حيث 0 هي المصفوفة الصفرية.

v. إذا كانت A و B مصفوفتين تبديليتين $AB = BA$ فإن:

$$e^{A}e^{B} = e^{A+B} = e^{B+A} = e^{B}e^{A}$$

8.1 جبر لي لزمرة لي The Lie Algebra of Lie Group

ولتكن G زُمر لي أي أنها زمرة جزئية مغلقة من الزمر لي الخطية ونعرف جبر لي على النحو التالي:

$$\mathcal{L} = \{X = \gamma'(0) \mid \gamma: \mathfrak{T} \to G \;\; , \gamma(0) = I \}$$

بحيث يكون $\mathfrak{T}$ فترة مفتوحة من مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$ تحتوي على العنصر الصفري.

وتمثل مجموعة المتجهات المماســية لجميع المنحنيات البارامترية القابلة للاشــتقاق من الرتبة الأولى C^{1} في الزمر لي G والتي تمر عبر الفترة المفتوحة $\mathfrak{T}$ عندما تكون قيمة البارامتر يساوي صفرًا.

تعريف[15] :

يعرف جبر لي للزمرة لي **G** بأنه الفضاء المماسي (Tangent space) عند العنصر محايد I .

ملاحظات[15،16]

جبر لي من زمر لي الخطية الخاصة $gL(m , R)$ والزُمر المتعامدة والزُمر الواحدية تكون كالتالي:

i. $sl(n , R) = \{X \in gL(n, F) \mid \; Tr\, X = 0 \}$.

ii. $o(n) = \{X \in gL(n, R^{n}) \mid X^{T} = -X\}$.

يحتوي على كل المصفوفات الحقيقية ملتوية التماثل من الرتبة $n \times n$.

iii. $so(n) = \{X \in gL(n, R^{n}) \mid X^{T} = -X , \; TrX = 0\}$.

يحتوي على كل المصفوفات الحقيقية ملتوية التماثل من الرتبة $n \times n$.

iv. $u(n) = \{X \in gL(n, ¢) \mid X^{*} = -X\}$

يحتوي على جميع مصفوفات الحقيقية ملتوية التماثل الهرميشية من الرتبة $n \times n$.

Received: *20-11-2025* - ***Accepted***: *18-01-2026* - ***Published***: *24-01-2026*

Alqalam Journal of Science
مجلـــة القلم للعلـوم
https://alqalam.utripoli.edu.ly/index.php/AR

v. $su(n) = \{X \in gl(n, R^n) \mid {X^*}^T = -X, \ trX = 0\}$.

يحتوي على كل المصفوفات الحقيقية ملتوية التماثل الهرميشية من الرتبة $n \times n$. وأثرها يساوي صفر.

ومما سبق نستنتج أن أبعاد جبر لي هي أبعاد زمر لي نفسها.

ولتكن زمرة الدوران $SO(3)$ ضد عقارب الساعة حول محور الإحداثيات [12]

$$A_1(\varepsilon_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varepsilon_1 & \sin\varepsilon_1 \\ 0 & -\sin\varepsilon_1 & \cos\varepsilon_1 \end{pmatrix}$$

$$A_2(\varepsilon_2) = \begin{pmatrix} \cos\varepsilon_2 & 0 & \sin\varepsilon_2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\varepsilon_2 & 0 & \cos\varepsilon_2 \end{pmatrix}$$

$$A_3(\varepsilon_3) = \begin{pmatrix} \cos\varepsilon_3 & \sin\varepsilon_3 & 0 \\ -\sin\varepsilon_3 & \cos\varepsilon_3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

وهي تمثل لكل المنحنيات في جوار العنصر المحايد في $SO\ (3)$ كما نحصل على:

$$A_1(0) = A_2(0) = A_3(0) = I$$

نفاضل عند العنصر المحايد، لنحصل على مصفوفات ملتوية التماثل

$$X_j = \left.\frac{dA_j(\varepsilon_j)}{d\varepsilon_j}\right|_{\varepsilon_j=0}$$

$$X_1 = \left.\frac{dA_1(\varepsilon_1)}{d\varepsilon_1}\right|_{\varepsilon_1=0} = \left.\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\sin\varepsilon_1 & \cos\varepsilon_1 \\ 0 & -\cos\varepsilon_1 & -\cos\varepsilon_1 \end{pmatrix}\right|_{\varepsilon_1=0}$$

$$X_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$X_2 = \left.\frac{dA_2(\varepsilon_2)}{d\varepsilon_2}\right|_{\varepsilon_2=0} = \left.\begin{pmatrix} -\sin\varepsilon_2 & 0 & \cos\varepsilon_2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -\cos\varepsilon_2 & 0 & -\sin\varepsilon_2 \end{pmatrix}\right|_{\varepsilon_2=0}$$

$$X_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$X_3 = \left.\frac{dA_3(\varepsilon_3)}{d\varepsilon_3}\right|_{\varepsilon_3=0} = \left.\begin{pmatrix} -\sin\varepsilon_3 & \cos\varepsilon_3 & 0 \\ -\cos\varepsilon_3 & -\sin\varepsilon_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right|_{\varepsilon_3=0}$$

$$X_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

وتوجد العلاقة التبديلية.

Received: 20-11-2025 - **Accepted**: 18-01-2026 - **Published**: 24-01-2026

Alq J Sci. 2026;2(1):95-114
https://doi.org/10.69667/ajs.26108
Alqalam Journal of Science
مجلة القلم للعلوم
https://alqalam.utripoli.edu.ly/index.php/AR

$$[X_1 , X_2] = X_1X_2 - X_2X_1$$
$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = X_3$$

كما أن:

$$[X_2 , X_3] = X_2X_3 - X_3X_2$$
$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = X_1$$
$$[X_3 , X_1] = X_3X_1 - X_1X_3 = X_2$$

بالتالي فإن المصفوفات X_j تشكل أساسا للجبر لي.

$$[X_i , X_j] = X_iX_j - X_jX_i = \varepsilon_{ijk}X_k$$

وتسمى ε_{ijk} بثابت الهيكلة Structure constant.

علاقات التبديل والثوابت الهيكلة Commutation Relations and Structure Constants

لتكن $\mathcal{L}$ جبر لي من البُعد n بحيث تكون $X_1, X_2 \dots X_n$ أساسا للفضاء الاتجاهي $\mathcal{L}$، وتعبّر علاقات التبديل باستخدام قوس لي وتكون كالتالي:

$$[X_i , X_j] \qquad , \qquad 1 \le i < j \le n$$

وتُعرف الثوابت الهيكلة ε_{ijk} على أنها أعداد حقيقة أو مركبة بحيث تحقق العلاقة التالية [15]:

$$[X_i , X_j] = \sum_{k=1}^{n} \varepsilon_{ijk}X_k \tag{22.1}$$

1.2 تعريف زمرة الدوران $SO(3)$

تحتوي زمرة الدوران المتعامدة الخاصــة على جميع التحويلات الخطية المســتمرة في الفضــاء الإقليدي ثلاثي الأبعاد والتي تحافظ على الطول المتجه الإحداثي ثابتا[7] .

ونعرف الدوران الثلاثي الأبعاد بأنها التحويلات الخطية من المتجهات $\vec{x} = (x_1, x_2 , x_3)$.

$$x_i' = \sum_j R_{ij}\, x_j \tag{1.2}$$

التي تترك مربع طول المتجه x ثابتا.

أي أن:

$$\overrightarrow{x'^2} = \overrightarrow{x^2} \tag{2.2}$$

ومن الشرط أعلاه نحصل على:

Received*: 20-11-2025 -* ***Accepted****: 18-01-2026 -* ***Published****: 24-01-2026*

Alq J Sci. 2026;2(1):95-114
https://doi.org/10.69667/ajs.26108
Alqalam Journal of Science
مجلـــة القلم للعلـوم
https://alqalam.utripoli.edu.ly/index.php/AR

$$x'^2 = \sum_{ijk} R_{ij} R_{ik} x_j x_k = \sum_j x_j^2 \qquad (3.2)$$

وحيث أن:

$$R_{ij} R_{ik} = \delta_{jk} \qquad (4.2)$$

ويمكن كتابة المعادلتين (1.2) و (4.2) بالصيغة المصفوفية على النحو التالي:

$$x' = Rx \qquad (5.2)$$

ومنها نرى أن:

$$R^T R = I \qquad (6.2)$$

وحيث R^T تمثل المصفوفة المحورة لـــ R وتعرف المعادلة (6.2) بالزمرة المتعامدة $O(3)$ وتسمى المصفوفة R بالمصفوفة المتعامدة، وتحقق الشرط التالي:

$$\det(R) = \mp 1 \qquad (7.2)$$

وتحتوي هذه الزمرة على مجموعتين منفصـلتين بحيث يقابل الشـرط $\det R = 1$ ، وتُعرف بالزمرة المتعامدة الخاصـة $SO(3)$ أو بزمرة الدوران، والتي لا تحتوي على انعكاس فضـائي وتسـمى بالدوران النقي، أما إذا كان المحدد يسـاوي $1-$ يسـمى دورانا غير نقي لأنه يتضـمن انعكاسًـا حاصـل ضـرب تحويلة الدوران متبوعة بتحويلة الانعكاس ويُعرف بالدوران المرآتي (Mirror Rotation) حيث يشـمل الانعكاس الفضـائي I_S. يحتوي هذا التحويل على ثلاث بارامترات مستقلة، مما يعني أن بُعدها يساوي ثلاثة[10] .

حيث:
$$I_S = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

فعلى سبيل المثال لو أن:

$$R_1 = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \quad , \quad R_2 = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$$

فإن محدد هاتين المصفوفتين هو ± 1.

$$\det R_1 = 1 \quad , \quad \det R_2 = -1$$

محدد مصفوفة الدوران R_1 هو دوران نقي أما مصفوفة الدوران R_2 هي دوران غير نقي[18] .

2.2 فضاء منكو نسكي Minkowski Space

البعد الرباعي للزمكان مع موثر منكو نسكي $\{\mu\}$ يسمى فضاء منكو نسكي [7].

$$(ds)^2 = \mu_{\mu\vartheta} dx^{\mu} dx^{\vartheta} \qquad (16.2)$$

حيث:

$$\mu_{mv} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3.2 تحويلة لورنتز Lorentz TRANSFORMATIONS

هي مجموعة من كل التحويلات التي تحافظ على الضرب القياسي من فضاء منكو نسكي[14] .

$$x^2 = x^{\mu} x^{\vartheta} = x^{\mu} \eta_{\mu\nu} x^{\nu} = (x^0)^2 - (x^0)^2 - (x^0)^2 - (x^0)^2 \qquad (17.2)$$

***Received**: 20-11-2025 - **Accepted**: 18-01-2026 - **Published**: 24-01-2026*

Alq J Sci. 2026;2(1):95-114
https://doi.org/10.69667/ajs.26108
Alqalam Journal of Science
مجلـــة القلم للعلـوم
https://alqalam.utripoli.edu.ly/index.php/AR

حيث أن $\eta_{\mu\nu}$ تشير إلى مؤثرات فضاء منكو نسكي.

وتُعرّف تحويلة لورنتز كالتالي [17،10] :

$$x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\vartheta} x^{\nu} \qquad (18.2)$$

والتي تترك طول المتجه ثابتا.

$$x'^2 = x^2 \qquad (19.2)$$

حيث أن x هو متجه رباعي الأبعاد يحتوي على الإحداثيات.

$$x^{\mu} = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (ct\,, x, y\,, z) \qquad (20.2)$$

حيث أن c سرعة الضوء في الفراغ.

كما نُعرّف مربع المتجه الرباعي كالتالي:

$$(x^2) = \eta_{\mu\nu} x^{\mu} x^{\nu} = x^{\mu} x_{\nu} = (x^0)^2 - (x)^2 \qquad (21.2)$$

حيث أن $\eta_{\mu\nu}$ هو المؤثر المتري ويكون كالتالي:

$$\eta_{\mu\nu} = \eta_{\nu\mu} = \begin{cases} 0 & \mu \neq \vartheta \\ 1 & \mu = \vartheta = 0 \\ -1 & \mu = \vartheta = 1, 2, \text{or } 3 \end{cases} \qquad (22.2)$$

وبالتعويض من المعادلة (19.2) في المعادلة (18.2) نحصل على الصيغة التالية:

$$\eta_{\mu\nu} x'^{\mu} x'^{\nu} = \eta_{\mu\nu} x^{\mu} x^{\nu} \qquad (23.2)$$

$$\eta_{\mu\nu} \left(\Lambda^{\mu}_{\lambda} x^{\lambda}\right)\left(\Lambda^{\nu}_{\rho} x^{\rho}\right) = \eta_{\mu\nu} x^{\mu} x^{\nu} \qquad (24.2)$$

كما يُجرى في المعادلة (24.2) تغيير في رموز الأدلة أو إعادة تسميتها على النحو التالي :

$$\mu \leftrightarrow \lambda \qquad \nu \leftrightarrow \rho$$

وبعد إعادة تسمية الأدلة تكون الصيغة على النحو التالي:

$$\eta_{\mu\nu} x^{\mu} x^{\nu} = \eta_{\lambda\rho} (\Lambda^{\lambda}_{\mu} x^{\mu})(\Lambda^{\rho}_{\nu} x^{\nu}) \qquad (25.2)$$

ومنها نرى أن:

$$\eta_{\mu\nu} = \eta_{\lambda\rho} \Lambda^{\lambda}_{\mu} \Lambda^{\rho}_{\nu} \qquad (26.2)$$

ولتكن المصفوفتان η ,Λ من الرتبة 4×4 كالتالي:

$$(\eta)_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} \qquad \text{or } \eta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad (27.2)$$

$$\Lambda_{\mu\nu} = \Lambda^{\mu}_{\nu} \qquad \text{or } \Lambda = \begin{pmatrix} \Lambda^0_0 & \Lambda^0_1 & \Lambda^0_2 & \Lambda^0_3 \\ \Lambda^1_0 & \Lambda^1_1 & \Lambda^1_2 & \Lambda^1_3 \\ \Lambda^2_0 & \Lambda^2_1 & \Lambda^2_2 & \Lambda^2_3 \\ \Lambda^3_0 & \Lambda^3_1 & \Lambda^3_2 & \Lambda^3_3 \end{pmatrix}$$

وأيضا يمكننا كتابة الشرط (26.2) على صورة معادلة مصفوفية:

(لاحظ $((A^T)_{\mu\vartheta} = (\Lambda)_{\upsilon\mu} = \Lambda^{\nu}_{\mu}$).

$$\Lambda^T \eta \Lambda = \eta \qquad (28.2)$$

وكما نلاحظ من(27.2) .

***Received**: 20-11-2025 - **Accepted**: 18-01-2026 - **Published**: 24-01-2026*

Alq J Sci. 2026;2(1):95-114
https://doi.org/10.69667/ajs.26108
Alqalam Journal of Science
مجلـــة القلم للعلـوم
https://alqalam.utripoli.edu.ly/index.php/AR

$$\eta^{T} = \eta \qquad , \det\eta = -1 \qquad (29.2)$$

ونجد أن الشرط يتحقق.

$$\eta^{\mu\lambda}\eta_{\lambda\nu} = \delta^{\mu}_{\nu} \qquad \mu, \nu = 0,1,2,3$$

ويمكن أن نستنتج من المعادلة (28.2) ونضرب الطرفين في Λ^{-1} و η^{-1}.

$$\eta^{-1}\Lambda^{T}\eta\{\Lambda\Lambda^{-1}\} = \eta^{-1}\eta\Lambda^{-1}$$
$$\eta^{-1}\Lambda^{T}\eta\, I = I\, \Lambda^{-1}$$
$$\Lambda^{-1} = \eta^{-1}\Lambda^{T}\eta \qquad (30.2)$$

من المعادلة (28.2) نأخذ المحدد بحيث نحصل على:

$$\det(\Lambda^{T}\eta\Lambda) = \det(\eta)$$
$$\det(\Lambda^{T})\det(\eta)\det(\Lambda) = \det(\eta)$$
$$\det(\Lambda^{T})(-1)\det(\Lambda) = -1$$
$$\det(\Lambda^{T})\det(\Lambda) = 1$$
$$(\det\Lambda)^{2} = 1$$
$$\det\Lambda = \mp 1 \qquad (31.2)$$

القيمة الموجبة $\det\Lambda = 1$ لها علاقة بعملية الدوران المكاني أي لا تحتوي على الانعكاس الزمني والانعكاس الفضـــائي. ويمكن بناء تحويلة لورنتز النقية من تحويلة لا نهائية الصغر مرتبطة بالمحايد وتسمى التحويلة النقية ويرمز لها بالرمز $\mathcal{L}_{+}$.

والقيمة الســالبة $\det\Lambda = -1$ لها علاقة بعملية الانقلاب المكاني أو الانعكاس الزمني، ولا يمكن بناؤها من تحويلة لا نهائية الصـغر، وتسـمى تحويلة لورنتز غير النقية، ويرمز لها بالرمز $\mathcal{L}_{-}$

وأيضا لو فرضنا أن $\mu = \nu = 0$ في المعادلة (26.2) التالية [18] :

$$\eta_{00} = \eta_{\lambda\rho}\Lambda^{\lambda}_{0}\Lambda^{\rho}_{0} \qquad (32.2)$$

$$\eta_{00} = \eta_{00}\Lambda^{0}_{0}\Lambda^{0}_{0} + \eta_{11}\Lambda^{1}_{0}\Lambda^{1}_{0} + \eta_{22}\Lambda^{2}_{0}\Lambda^{2}_{0} + \eta_{33}\Lambda^{3}_{0}\Lambda^{3}_{0}$$
$$1 = (\Lambda^{0}_{0})^{2} - (\Lambda^{1}_{0})^{2} - (\Lambda^{2}_{0})^{2} - (\Lambda^{3}_{0})^{2}$$
$$1 = (\Lambda^{0}_{0})^{2} - \sum_{i=0}^{3}(\Lambda^{i}_{0})^{2}$$
$$(\Lambda^{0}_{0})^{2} = 1 + \sum_{i=0}^{3}(\Lambda^{i}_{0})^{2}$$

أي أن:

$$(\Lambda^{0}_{0})^{2} = 1 + \sum_{i=0}^{3}(\Lambda^{i}_{0})^{2} \geq 1 \qquad (33.2)$$

ونلاحظ أن من الصيغة (33.2) :

$$(\Lambda^{0}_{0})^{2} \geq 1$$
$$\Lambda^{0}_{0} \geq 1 \quad \text{or} \quad \Lambda^{0}_{0} \leq -1 \qquad (34.2)$$

وتنقسم تحويلة لورنتز المتجانسة الى أربع فئات معتمدة على الشرطين (33.2) و (31.2) وتكون كالتالي: [24]

1. $\mathcal{L}^{\uparrow}_{+} \quad : \quad \det\Lambda = 1 \qquad ; \quad \Lambda^{0}_{0} \geq 1$

وهذا النوع يحتوي على عنصر محايد من الزمرة G حيث أن:

$$x'^{0} = x^{0} \ , \ x'^{1} = x^{1} \ , x'^{2} = x^{2} \ , x'^{3} = x^{3}$$

***Received**: 20-11-2025 - **Accepted**: 18-01-2026 - **Published**: 24-01-2026*

Alq J Sci. 2026;2(1):95-114
https://doi.org/10.69667/ajs.26108
Alqalam Journal of Science
مجلـــة القلم للعلـوم
https://alqalam.utripoli.edu.ly/index.php/AR

وتُعرف بتحويلة لورنتز المتعامدة النقية "proper orthochonous Lorentz group " وتعبر هذه المجموعة عن التحويلات المســتمرة والتي يمكن ربطها بالمصفوفة المحايدة.

2. لو أن $\mathcal{L}_{-}^{\uparrow}\ :\ \det\Lambda = -1 \qquad ;\ \Lambda_0^0 \geq 1$

وهذا النوع يحتوي على عنصر الانعكاس الفضائي S الذي يصف الانعكاس بالنسبة لمحاور الفضاء الثلاثة.

$$x'^0 = x^0 \ ,\ x'^1 = -x^1 \ ,x'^2 = -x^2 \ ,x'^3 = -x^3$$

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

3. وفي حالة أن $\mathcal{L}_{-}^{\downarrow}\ :\ \det\Lambda = -1 \qquad :\ \Lambda_0^0 \leq 1$

فإن هذا النوع يحتوي على عنصر الانعكاس الزمني T الذي يصف الانعكاس بالنسبة لمحور الزمن.

$$x'^0 = -x^0 \ ,\ x'^1 = x^1 \ ,x'^2 = x^2 \ ,x'^3 = x^3$$

$$T = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

4. أما إذا كان $\mathcal{L}_{+}^{\downarrow}\ :\ \det\Lambda = 1 \qquad ;\ \Lambda_0^0 \leq 1$

فإن هذا النوع يحتوي على عنصر الانعكاس الزمني والفضائي ST ويكون كالتالي:

$$x'^0 = -x^0 \ ,\ x'^1 = -x^1 \ ,x'^2 = -x^2 \ ,x'^3 = -x^3$$

$$ST = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

4.2 زمرة لورنتز المتعامدة النقية: Proper orthochonous Lorentz group

هي مجموعة من تحويلات لورنتز $\{\Lambda\}$ التي تحقق الشرط التالي [17] :

$$\det\Lambda = 1 \qquad ;\ \Lambda_0^0 \geq 1 \qquad (35.2)$$

وتُعرف بزمرة لورنتز النقية، ويلاحظ أن الشرط (35.2) لا يسمح بالانعكاس الزمني ولا الانعكاس الفضائي، كما أنه يحتوي على عنصر محايد من زمرة G ويُرمز لها بالرمز $\mathcal{L}_{+}^{\uparrow}$.

5.2 زمرة لورنتز غير النقية: Improper Lorentz group

لتكن $A \in L$ وتحقق الشرط التالي:

$$\det\Lambda = -1 \qquad ;\ \Lambda_0^0 \geq 1 \text{ أو } \Lambda_0^0 \leq 1 \qquad (36.2)$$

ولكن تسمح بأحد الشرطين $\Lambda_0^0 \leq 1$ أو $\Lambda_0^0 \geq 1$ وتُسمى زمرة لورنتز غير النقية.

ويتضــح أن الشـرط (36.2) يســمح بالانعكاس الزمني والانعكاس الفضـائي، ويُرمز لها بالرمز $\mathcal{L}_{-}^{\uparrow}$ أو بمعنى أن الزمرة تحتوي على الانعكاس الزمني والانعكاس الفضائي[22] .

ملاحظة:

1. الدوران في ثلاث أبعاد[18] .

***Received**: 20-11-2025 - **Accepted**: 18-01-2026 - **Published**: 24-01-2026*

Alq J Sci. 2026;2(1):95-114
https://doi.org/10.69667/ajs.26108

Alqalam Journal of Science
مجلـــة القلم للعلـوم
https://alqalam.utripoli.edu.ly/index.php/AR

نلاحظ أن مصفوفة الدوران في ثلاثة أبعاد في الفضاء الإقليدي تترك الزمن بدون تغير وتوضح تحقيق الشرط(31.2) ويكون ذلك في الصورة التالية:

$$R_{\nu}^{\lambda}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & & & \\ 0 & & R_j^i & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$$

حيث أن: R_j^i تبين مصفوفة الدوران من الرتبة 3×3 .

2. تحويلة لورنتز التي تخلط بين الإحداثيات الزمنية والمكانية تسمى دفعة لورنتز Boost Lorentz

وهذا يعني أن التغير في النظام الإحداثي يتحرك بسرعة ثابتة ومختلفة مقارنة بالنظام الإحداثي الأصلي وتكون الصيغة التالية [7]:

$$(\ell_1)_{\vartheta}^{\mu}=\begin{pmatrix}\cosh\xi & \sinh\xi & 0 & 0\\ \sinh\xi & \cosh\xi & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

6.2 مصفوفات لورنتز منتهية الصغر infinitesimal Lorentz Matrices

لتكن مصـــفوفـة الـدوران هي $a_1(\Psi)\,,a_2(\Psi)\,,a_3(\Psi)$ وتحويلـة لورنتز هي $b_1(\Psi)\,,b_2(\Psi)\,,b_3(\Psi)$ حول محـاور OX^1, OX^2, OX^3، ويمكن كتابتها بشكل أكثر وضوحا كما يلي [19]:

$$a_1(\psi)=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \cos\psi & -\sin\psi\\ 0 & 0 & \sin\psi & \cos\psi\end{pmatrix}$$

$$a_2(\psi)=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & \cos\psi & 0 & \sin\psi\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & -\sin\psi & 0 & \cos\psi\end{pmatrix} \tag{38.2}$$

$$a_3(\psi)=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & \cos\psi & -\sin\psi & 0\\ 0 & \sin\psi & \cos\psi & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

وأيضا توجد تحويلة لورنتز كالتالي:

$$b_1(\psi)=\begin{pmatrix}\cosh\psi & \sinh\psi & 0 & 0\\ \sinh\psi & \cosh\psi & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$b_2(\psi)=\begin{pmatrix}\cosh\psi & 0 & \sinh\psi & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ \sinh\psi & 0 & \cosh\psi & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix} \tag{39.2}$$

***Received**: 20-11-2025 - **Accepted**: 18-01-2026 - **Published**: 24-01-2026*

$$b_3(\psi)=\begin{pmatrix}\cosh\psi & 0 & 0 & \sinh\psi\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ \sinh\psi & 0 & 0 & \cosh\psi\end{pmatrix}$$

وتحقق العلاقة التالية:

$$a_k(\psi_1)a_k(\psi_2)=a_k(\psi_1+\psi_2)$$
$$b_k(\psi)_1 b_k(\psi)_2=b_k(\psi_1+\psi_2)\qquad k=1,2,3 \tag{40.2}$$

وتؤدي هذه إلى مصفوفات لا نهائية الصغر a_1, a_2, a_3 و b_1, b_2, b_3 من زمرة لورنتز ℓ

$$a_k=\left.\frac{da_k(\psi)}{d\psi}\right|_{\psi=0},\qquad b_k=\left.\frac{db_k(\psi)}{d\psi}\right|_{\psi=0} \tag{41.2}$$

نفاضل $b_1, b_2, b_3, a_1, a_2, a_3$ من العلاقتين (38.2) و (39.2) لنحصل على:

$$a_1=\left.\frac{da_1(\psi)}{d\psi}\right|_{\psi=0}=\left.\begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -\sin\psi & \cos\psi\\ 0 & 0 & \cos\psi & \sin\psi\end{pmatrix}\right|_{\psi=0}$$

$$a_1=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 1 & 0\end{pmatrix} \tag{42.2}$$

$$a_2=\left.\frac{da_2(\psi)}{d\psi}\right|_{\psi=0}=\left.\begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -\sin\psi & 0 & \cos\psi\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -\cos\psi & 0 & -\sin\psi\end{pmatrix}\right|_{\psi=0}$$

$$=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0 & 0\end{pmatrix} \tag{43.2}$$

$$a_3=\left.\frac{da_3(\psi)}{d\psi}\right|_{\psi=0}=\left.\begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -\sin\psi & \cos\psi & 0\\ 0 & \cos\psi & \sin\psi & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\right|_{\psi=0}=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

وكذلك نفاضل b_1, b_2, b_3 في العلاقة (39.2) لنجد أن: -

$$b_1=\left.\frac{db_1(\psi)}{d\psi}\right|_{\psi=0}=\left.\begin{pmatrix}\sinh\psi & \cosh\psi & 0 & 0\\ \cosh\psi & \sinh\psi & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\right|_{\psi=0}$$

$$b_1=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix} \tag{45.2}$$

Received*: 20-11-2025 -* ***Accepted****: 18-01-2026 -* ***Published****: 24-01-2026*

Alq J Sci. 2026;2(1):95-114
https://doi.org/10.69667/ajs.26108
Alqalam Journal of Science
مجلة القلم للعلوم
https://alqalam.utripoli.edu.ly/index.php/AR

$$b_2 = \frac{db_2(\psi)}{d\psi}\bigg|_{\psi=0}$$

$$b_2 = \begin{pmatrix} \sinh\psi & 0 & \cosh\psi & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \cosh\psi & 0 & \sinh\psi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\Bigg|_{\Psi=0}$$

$$b_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{46.2}$$

$$b_3 = \frac{db_3(\psi)}{d\psi}\bigg|_{\psi=0} = \begin{pmatrix} \sinh\psi & 0 & 0 & \cosh\psi \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \cosh\psi & 0 & 0 & \sinh\psi \end{pmatrix}\Bigg|_{\psi=0}$$

$$b_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

علاقة تحويلة لورنتز والدوران $a_k(\Psi)$, $b_k(\Psi)$ كالتالي:

$$a_k(\Psi) = \exp(\Psi a_k), \qquad b_k(\Psi) = \exp(\Psi b_k) \qquad k = 1,2,3$$

7.5 العلاقات التبديلية Commutation Relations

إن مصفوفات تحويلة لورنتز لانهائية الصغر تحقق العلاقة التبديلية كالتالي[19] :

$$\begin{gathered} [\, a_i\,, a_j\,] = \varepsilon_{ijk} a_k \\ [\, b_i\,, b_j\,] = \varepsilon_{ijk} b_k \\ [\, a_i\,, b_j\,] = \varepsilon_{ijk} b_k \end{gathered} \tag{47.2}$$

حيث أن: $[a\,, b] = ab - ba$، ويمكن التحقق بسهولة من المعادلتين (47.2) باستخدام المعادلة (41.2).

$$[\, a_1\,, a_2\,] = a_1 a_2 - a_2 a_1$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = a_3$$

$$\therefore [\, a_1\,, a_2\,] = a_3 \tag{48.2}$$

$$[\, b_1\,, b_2\,] = b_1 b_2 - b_2 b_1$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Received*: 20-11-2025 -* ***Accepted****: 18-01-2026 -* ***Published****: 24-01-2026*

Alq J Sci. 2026;2(1):95-114
https://doi.org/10.69667/ajs.26108
Alqalam Journal of Science
مجلـــة القلم للعلـوم
https://alqalam.utripoli.edu.ly/index.php/AR

$$=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&1&0\\0&-1&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&-1&0\\0&1&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}=a_3$$

$$\therefore [\ b_1\ , b_2\ ] = a_3 \qquad (49.2)$$

$$[\ a_1\ , b_1\ ] = a_1 b_1 - b_1 a_1$$

$$=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&-1\\0&0&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&-1\\0&0&1&0\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix}=b_3$$

$$\therefore [\ a_1\ , b_1\ ] = b_3 \qquad (50.2)$$

3. طريقة الثماني الطية (1961) **The Eightfold Way**

قدم جيل – مان في عام 1961 مخططا هندسيا لتصنيف الجسيمات (الهادر ونات) والذي أصبح يعرف باسم مصفوفة مان رتبت الطريقة الثمانية الباريونات والميزونات في أنماط هندسية غربية وفقا لشحنتها وغرابتها حيث ميزت الزمرة $SU(3)$ بعددين كميين مضافين أي الهادرونات، ويمكن التعرف على مركبة شبه المغزلية T_3 والشحنة الزائدة Y بوصف مفصل للعملية التي وصل بها جيل مان إلى مخططات التصنيف الخاصة به. وعليه نقدم العددين الكميين آخرين هما الشحنة الزائدة Y وعدد الباريون B وكلاهما مرتبطان بالغرابة، حيث تعرف الشحنة الزائدة بأنها مجموع عدد الغرابة وعدد الباريون.

$$Y \equiv B + S \qquad (1.3)$$

يأخذ عدد الباريونات القيم 1 للباريونات و-1 لمضادات الباريونات و0 لجميع الجسيمات الأخرى (أي الميزونات واللبتونات) تماما مثل الغرابة، وأن كلا من الشحنة الزائدة وعدد الباريون هما عددان كميان محفوظان بدقة في التفاعلات القوية، وأيضا العدد الكمي لغرابة ورقم الشحنة يوضحان دراسة هذا المتغير وأن رقم الشحنة Q المعطاة كالتالي [20،9]

$$Q = T_3 + \frac{Y}{2} = T_3 + \frac{(B+S)}{2} \qquad (2.3)$$

2.3 الميزون الثماني

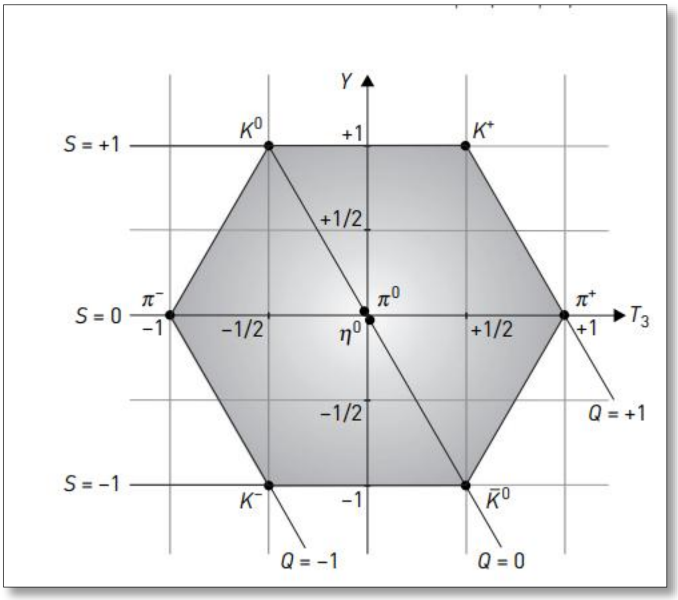
عند ترتيب جميع الجسيمات المعروفة حسب المركبة شبه المغزلية Isospin component والشحنة الزائدة Y في المخطط ثنائي الأبعاد الموضح في الشكل (2) الميزونات الزائفة في الجدول (1) عبارة عن ثماني جسيمات حيث تقع ست جسيمات في زوايا الشكل السداسي المنتظم وجسمان آخران يقعان في المركز بالرسم البياني وأطلق جيل–مان تسمية مخطط بطريقة الثُماني الطية لوصف ترتيب كل جسيم كما في الشكل.(2) . ويمكن قراءة القيمتين الشحنة الزائدة والمركبة شبه المغزلية من المحورين T_3, Y حيث تشترك الجسيمات التي تقع على الخط الأفقي موازٍ لمحور T_3 في القيمة نفسها للغرابة، فعلى سبيل المثال: جميع المتغيرات الثلاثة من البيونات (π^-, π^+, π^0) بالغرابة $S = 0$ أما الكايونات الموجودة على الخط العلوي$(k^0\ ,\ k^+)$ تتميز بقيمة الغرابة $S = 1$ بينما الموجودة على الخط السفلي لـ $(k^-\ ,\ k^{-0})$ لها $S = -1$ والأقطار المنحدرة للأسفل تربط بين الجسيمات في عدد الشحنة المتشابهة Q، فعلى سبيل المثال: الجسيمات المحايدة$(k^0\ ,\ \pi^0, k^{-0})$ تقع جميعها على طول القطر الرئيسي وأن عدد الشحنة $Q = 0$ وبالمثل $Q = -1$ عند π^- و K^- وأيضا $Q = -1$ عند π^- و K^- وأن الجسيمات التي تتخذ مواضع معاكسة في المخطط هي جسيمات مضادة لبعضها البعض إذ نلاحظ أن $B = 0$ وتسمى بالميزون بمعنى أن كل الميزونات لها التفاف $J = 0$.

Received*: 20-11-2025 -* ***Accepted****: 18-01-2026 -* ***Published****: 24-01-2026*

Alq J Sci. 2026;2(1):95-114
https://doi.org/10.69667/ajs.26108
Alqalam Journal of Science
مجلــة القلم للعلـوم
https://alqalam.utripoli.edu.ly/index.php/AR

الجدول (1) الميزون الثماني.

	S	I	T_3	Q	J	Mass (MeV/c^2)
K^+	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	0	494
K^0	1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	0	498
$\bar{K}^0$	1-	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	0	498
K^-	1-	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	-1	0	494
π^+	0	1	1	1	0	140
π^0	0	1	0	0	0	135
π^-	0	-1	-1	1-	0	140



الشكل (2) الميزون الثماني.

المراجــع

أولا: المراجع العربية

1. علي محمد عوين، الفيزياء الرياضية، مؤسسة فينوس، القاهرة 1997

ثانيا: المراجع الأجنبية:

2. Arfken GB. Mathematical methods for physics. In: More mathematical methods for physics and engineering. New York: Acad Press; 1995.
3. Campoamor-Stursberg R, De Traubenberg MR. Group theory in physics: a practitioner's guide. London: World Scientific; 2019.

Received*: 20-11-2025 -* ***Accepted****: 18-01-2026 -* ***Published****: 24-01-2026*

4. Carmeli M. Group theory and general relativity representations of the Lorentz group and their applications to gravitational field. World Scientific; 2000.
5. Costa G, Fogli G. Symmetries and Group Theory in Particle Physics: An introduction to space-time and internal Symmetries. Vol. 823. 1st ed. New York: Springer; 2012.
6. Das A, Okubo S. Lie groups and lie algebras for physicist. World Scientific; 2014.
7. Gieres F, editor. Symmetries in Physics. France: Atlantica Seguier; 1997.
8. Griffiths D. Introduction to elementary particles. 2nd ed. New York: John Wiley; 2020.
9. Hall BC. Lie groups lie algebras and representations. New York: Springer; 2013.
10. Iliopoulos J. The Origin of mass: Elementary particles and fundamental symmetries. Oxford: Oxford University Press; 2017.
11. Kosmann-Schwarzbach Y. Groups and symmetries. Universitext. New York: Springer; 2010.
12. Lim EA. Symmetry in Physics [Internet]. 2014 [cited 2025 Mar 14]. Available from: http//www.damtp.com.ac.uk/user/ea140/lteach/symmetry2014/symroot.html.
13. McClain WM. Symmetry Theory in Molecular Physics with Mathematica. 1st ed. New York: Springer; 2008.
14. Rosen J. Symmetry rules: How science and nature are founded on Symmetry. New York: Springer Science Business Media; 2008.
15. Schwichenberg J. Physics from symmetry. Cham (CH): Springer International Publishing; 2018.
16. Sexl RU, Urbantke HK. Relativity groups particles special relativity and relativistic symmetry in field and particle physics. New York: Springer Science a Business Media; 2012.
17. Steeb WH. Continuous Symmetries lie algebras differential equations and Computer algebra. World Scientific Publishing Company; 2007.
18. Stillwell J. Naive lie theory. New York: Springer Science Business Media; 2008.
19. Thyssen P, Ceulemans A. Shattered symmetry groups theory from the eightfold way to the periodic table. Oxford: Oxford University Press; 2017.
20. Tung WK. Group theory in physics. Vol. 1. World Scientific; 1985.

Received*: 20-11-2025 -* ***Accepted****: 18-01-2026 -* ***Published****: 24-01-2026*