Alq J Sci. 2026;2(4):445-453
https://doi.org/10.69667/ajs.26408

Alqalam Journal of Science
مجلـــة القلم للعلـوم
https://alqalam.utripoli.edu.ly/index.php/AR

استخدام تحويلات فورييه المنفصلة لإنشاء رسوم فنية

زهرة عثمان عبد الله[1]*، شيفة عثمان عبد الله[2]

[1]قسم الرياضيات، كلية التربية تيجي، جامعة الزنتان، تيجي، ليبيا
[2]قسم الفيزياء، كلية التربية تيجي، جامعة الزنتان، تيجي، ليبيا
zahrah.abdullah@uoz.edu.ly

الملخص

تعتبر تحويلات فورييه جزءاً أساسياً من التقنيات الحديثة لما لها من تطبيقات واسعة في عالمنا الرقمي، فأحد أهم التطبيقات الأساسية لمتسلسلة فورييه تقريب الدوال الدورية باستخدام متعددة الحدود المثلثية، حيث يتم بواسطتها تتبع المنحنيات المغلقة عبر تحريك نظام من أفلاك التدوير، تستخدم في تحليل الاشارات، الصوت، وفي علم الفيزياء والرياضيات التطبيقية بكثرة. تم في هذه الورقة استخدام لغة البايثون لإنشاء رسوم فنية متحركة عبر أفلاك التدوير، لتوضيح فكرة عمل تحويلات فورييه بطريقة بصرية مبسطة لتسهيل فهمها من خلال دمج الفن والبرمجة.

الكلمات المفتاحية. تحويلات فورييه، افلاك التدوير، لغة البايثون.

Abstract

Fourier transformations are an essential part of modern technology due to their wide range of applications in our digital world. One of the most important applications of the Fourier series is the approximation of periodic functions using trigonometric polynomials, which trace closed curves by moving a system of epicycles. They are widely used in signal analysis, audio, physics, and applied mathematics. In this paper, Python was used to create artistic animations using epicycles to illustrate the concept of Fourier transforms in a simplified visual manner, facilitating their understanding by integrating art and programming.

Keywords. *Fourier Transforms, Epicycles, Python Language.*

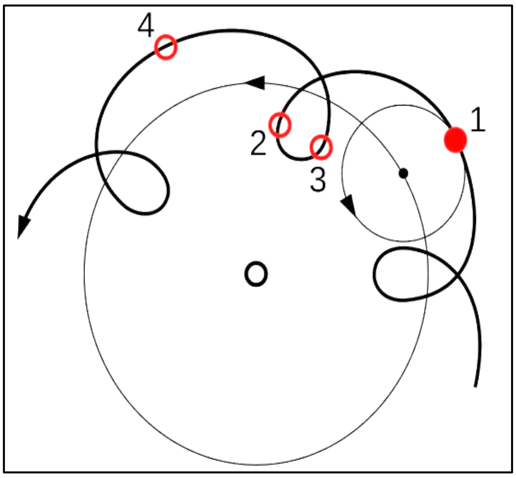
المقدمة:

تعتبر تحويلات فورييه المنفصلة صيغة رياضية حديثة نسبيا لفكرة "أفلاك التدوير" التي تعد من أقدم المصطلحات التي ارتبطت بعلم الفلك حيث استخدمت في القرن الثالث قبل الميلاد لوصف حركة كوكب يتحرك حول دائرة على يد عالم الفلك اليوناني"أبولونيوس بيرجا"[1]. ثم تطرق لها كتاب " المجسطي " لبطليموس بعد ذلك عندما وجد حلا لمشكلة المسار غير المنتظم الذي تتخذه أجسام مثل المريخ، عندما أكتشف ان الكواكب لا تتحرك في دائرة منتظمه بل على هيئة أفلاك تدوير، في نموذج كان يجعل الأرض مركز الحركة في ذلك الوقت [2].

رغم تغير العديد من المفاهيم مثل مركزية الشمس للحركة ومايتبعها من حقائق عن آلية هذه الحركة الا أن نموذج بطليموس كان دقيقا جداً[2]، فقد أتاح لنا تمثيل أي مسار من خلال مايعرف بأفلاك التدوير كما في الشكل (1)، وهذا يعتبر تقريبا لب ما استنتجه العالم (جوزيف فورييه) في القرن التاسع عشر[3]، حيث تعتبر" أفلاك التدوير" طريقة هندسة لفهم وتحليل مايسمى بمتسلسلة فورييه. إن الفكرة الاساسية لأفلاك التدوير ترجع إلى إمكانية تمثيل الى دالة دورية من دوال الجيب وجيب تمام كما في الشكل (1)، وهذا ما اضاف الى المتسلسلة طابعا منهجيا [3].

***Received**: 13-02-2026 - **Accepted**: 11-04-2026 - **Published**: 19-04-2026*

Alq J Sci. 2026;2(4):445-453
https://doi.org/10.69667/ajs.26408
Alqalam Journal of Science
مجلـــة القلم للعلـوم
https://alqalam.utripoli.edu.ly/index.php/AR



الشكل (1) يوضح عملية تتابع الدوائر أو المسارات

استخدم فورييه ذلك في كتابة " النظرية التحليليه للحرارة " في عام 1822 لحل معادلة الحرارة في الجسم الصلب [2]. وفي العصر الحديث، أعيد إحياء التصور البصري لأفلاك التدوير في الرسوم التوضيحية، والفن الرقمي لتوضيح طريقة بناء الاشكال المعقدة من مجموعه من الدوائر البسيطة [1]. حيث يعتبر عمل سانتياغو جينوبيلي وكرستيان سي. كامان الذي نشره في عام 2008 مثلا جيداً لاستخدام أفلاك التدوير في رسم شخصية الرسوم الفنية هومر سيمبسون.

في هذه الورقة، نستعرض العلاقة بين تحويلات فورييه المنفصلة ورسم الرسوم الفنية من خلال مناقشة الرياضيات اللازمة لذلك، فقمنا بأنشاء مجموعة من الرسوم والاشكال الفنية باستخدام لغة البايثون في البرمجة عن طريق أنظمه كبيرة جداً من الدوائر الدائرية تتحرك في مسارات مغلقة، لقد سبق واستخدمت تحويلات فورييه في عملية الرسم ولكن باستخدام (GeoGebra) من قبل (Campuzano, Juan Carlos Ponce)[5]، حيث يتم استخدام (GeoGebra) لتصوير المفاهيم الرياضية وذلك لفهم المعادلات بشكل مرئى لذا فإن استخدامنا للغة(python) يعد عملية لتطوير الرسم الرياضي باستخدام خوارزمية شاملة أكثر تطوراً وأدق استخداماً.

مشكلة البحث:

في كثير من الاحيان تواجهنا صعوبة كبيرة في رسم متسلسلات فورييه في هذا البحث تطرقنا الى طريقة عملية باستخدام لغة (Python) التي تعد أكثر تبسيط وسلاسة من الطرق التقليدية لتسهيل الفهم والتعامل مع هذه المتسلسلات وتطبيقاتها المتمثلة في تحويلات فورييه ومايعرف ب(Epicycles).

أهداف البحث:

1. التعرف على تطبيقات متسلسلة فورييه.
2. التعرف على افلاك التدوير.(Epicycles)
3. معرفة كيفية تمثيل و رسم الأشكال المعقدة لتحويلات فورييه باستخدام لغة (Python).

منهجية البحث:

استخدمه المنهج التجريبي من خلال استعمال لغة البايثون لرسم أحد أهم تطبيقات فورييه المتمثلة في أفلاك التدوير(Epicycles).

Received*: 13-02-2026 -* ***Accepted****: 11-04-2026 -* ***Published****: 19-04-2026*

Alq J Sci. 2026;2(4):445-453
https://doi.org/10.69667/ajs.26408
Alqalam Journal of Science
مجلة القلم للعلوم
https://alqalam.utripoli.edu.ly/index.php/AR

الدراسات السابقة:

دراسة(Campuzano, Juan Carlos Ponce)[5]، استخدمت (GeoGebra) لإنشاء ورسم أشكال فنية تتكون من أنظمة من الأفلاك التدويرية التي ترسم منحنيات مغلقة. حيث يمكن استخدام البناء الهندسي فيها كنشاط تعليمي تمهيدي لدراسة تحويلات فورييه المنفصلة من وجهة نظر هندسية.

دراسة (Birmanns, Jan Philipp)[6]، تستكشف هذه الورقة البحثية ظاهرة تتبع الرسومات باستخدام الدوائر التدويرية في الفضاء ثنائي وثلاثي ورباعي الأبعاد. وتُسلّط الورقة الضوء على كلٍّ من تحويل فورييه المنفصل وتحويل فورييه الرباعي المنفصل. وقد أسفر هذا البحث عن براهين دقيقة تُفسّر هذه الظاهرة، بالإضافة إلى عدد من الطرق لتحسين تحويل فورييه المنفصل العكسي.

تحويلات فورييه:

أن عملية رسم الاشكال الفنية تتمحور حول مفهومين أساسيين: تحويل فورييه (Fourier Transform) ومتسلسلة فورييه(Fourier series) حيث يعمل تحويل فورييه على الدوال الغير دوريه بينما متسلسلة فورييه تعمل مع الدوال الدورية. بحيث يعد تحويل فورييه أداة رياضية تحول الدالة من مجال الزمن الى مجال التردد بالنسبة لدالة f(t) يعطي تحويل فورييه بالمعادلة[7].

$$F(W) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-iwt}\,dt$$

حيث F(W) التمثيل الترددي للدالة، أو الافلاك التي تتكون منها.

يمكننا أيضا استخدام المعادلة المعاكسة لتحويل فورييه لإعادة بناء الدالة الأصلية.

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(w)e^{iwt}\,dw \qquad (1)$$

حيث ان f(t) دالة في مجال الزمن، وعند تطبيقها على الأشكال الهندسية فإن f(t) تمثل إحداثيات النقاط على المنحنى أو الدائرة، أن الأشكال الدورية مثل المنحنيات والدوائر المغلقة يمكن التعامل معها باستخدام الدالة f(t) بفترة دورية (T) حيث:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{inw_0 t} \qquad , \qquad w_0 = \frac{2\pi}{T} \qquad (2)$$

معاملات فورييه C_n تحسب كالتالي:

$$C_n = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)e^{-inw_0 t}\,dt$$

هذه المعاملات هي بالضبط "أفلاك" الدالة التي نحتاجها لإعادة بناء الصورة [7]،[8].

أفلاك التدوير (epicycles):

تعرف الأفلاك الدائرية بأنها مسارات دائرية تصف حركة الأجسام في الفضاء، سواء كانت هذه الأجسام تتحرك في مدارات أو على هيئة جسيمات دورانية، بحيث يمكن وصف هذه الحركة الدائرية بواسطة المعادلات البارمترية في الأحداثيات الديكارتية.

$$\begin{aligned} x(t) &= R\cos(wt+\varphi) \\ y(t) &= R\sin(wt+\varphi) \end{aligned}$$

Received: 13-02-2026 - **Accepted**: 11-04-2026 - **Published**: 19-04-2026

Alqalam Journal of Science
مجلــة القلم للعلـوم
https://alqalam.utripoli.edu.ly/index.php/AR

حيث R نصف القطر، φ زاوية الطور الأبتدائية، w التردد الزاوي[8].

إن ظهور الجيب وجيب التمام في هذه المعادلات يجعلها مثالية بحيث يمكن استخدام تحويل فورييه لتحليلها، لوفرضنا إن لدينا قرص دوار نصف قطره R_1 تدور حول محيطه مجموعة من الأقراص بأنصاف أقطار مختلفه $(R_2\ , R_3\ , \ldots .)$ فأن المعادلة تصبح على الصورة.

$$\begin{cases} x(t) = \sum_{k=1}^{N} R_k\ cos(w_k t + \varphi_k) \\ y(t) = \sum_{k=1}^{N} R_k\ sin(w_k t + \varphi_k) \end{cases} \qquad (3)$$

حيث إن R_k أنصاف اقطار الأقراص، φ_k مقدار تدوير القرص، (t=0) عند البداية وهي ازاحة الطور[9]. وهنا يمكننا أنشاء دورات دائرية ومنحنيات بسيطة باستخدام بعض البرامج أو لغات البرمجة مثل البايثون كما هو موضح بالشكل(1).

فإذا كان لدينا العديد من الأحجام المختلفة والمناسبة من الأقراص تدور بسرعات مختلفة في نفس الوقت فإننا نستطيع رسم أي شكل فني مغلق. للقيام بذلك نستخدام تحويل فورييه المنفصل(DFT)، يمكن كتابة المعادلة(3) على صورة أعداد مركبة كما يلي:

$$p_k = x_k + iy_k$$

المنحنى المغلق لها يكون على صورة المعادلة التالية:

$$x(t) + iy(t) = \sum_{k=1}^{N} R_k\ \left(cos(w_k t + \varphi_k) + i\ sin(w_k t + \varphi_k)\right) \qquad (4)$$

يمكن كتابة المعادلة (4) باستخدام صيغة أويلر $e^{it} = cost + isin\ t$ كما يلي:

$$x(t) + iy(t) = \sum_{k=1}^{N} R_k\ e^{-i\omega_k t + \varphi_k}$$

عندما تكون X_k عددا مركبا، فإن المعادلة أعلاه تصبح:

$$\sum_{k=1}^{N} X_k\ e^{-i\omega_k t}$$

حتى نضمن إن (N) لاتكون عشوائية السرعة فإننا نجعل (w_k) ذات سرعات منتظمة ومحددة القيم.

$$\mathrm{w_k} \in \left\{0, \pm 1\mathrm{x}, \pm 2\mathrm{x}, \pm 3\mathrm{x}, \ldots, \pm \frac{\mathrm{N}}{2}\mathrm{x}\right\}$$

هذا يعني بأن هذه السرعات تكون ذات مجموعة متناظرة من الترددات حول الصفر وموزعة بشكل متساوي، وهو بضبط ما يحدث في تحويل فورييه المنفصل حيث تؤخذ الترددات بشكل دوري.

ومن هنا تصبح المعادلة على النحو التالي:

Received: *13-02-2026* - ***Accepted***: *11-04-2026* - ***Published***: *19-04-2026*

Alq J Sci. 2026;2(4):445-453
https://doi.org/10.69667/ajs.26408
Alqalam Journal of Science
مجلة القلم للعلوم
https://alqalam.utripoli.edu.ly/index.php/AR

$$p(x)=\sum_{k=0}^{N} X_k \; e^{\frac{2\pi ik}{N}t} \qquad (5)$$

- **كيفية استخدام تحويل فورييه المنفصل في عملية الرسم:**

مما سبق يمكننا تعريف تحويل فورييه المنفصل (DFT) وعكسه (IDFT) على النحو التالي[5]:

$$DFT: \qquad X_k=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x_n \,.\, e^{-ik\frac{2\pi}{N}n}\,, \qquad k=0,1,\dots\dots,N-1 \qquad (6)$$

يأخذ هذا التحويل السلسلة زمنية x_n ويحولها الى سلسلة ترددية X_k،كما يمثل الأس المركب $e^{-i\frac{2\pi}{N}kn}$ الترددات الاساسية بينما العامل $\frac{1}{N}$ يضمن بأن التحويل و العكس يكرران القيم الأصلية.

$$IDFT: \qquad x_n=\sum_{k=0}^{N-1} X_k \,.\, e^{ik\frac{2\pi}{N}n}\,, \qquad n=0,1,\dots\dots\dots,N-1 \qquad (7)$$

يعيد هذا التحويل المجال الترددي إلى المجال الزمني.

فيمكننا كتابة المعادلتين السابقتين باستخدام صيغة أويلر على النحو التالي:

$$X_k=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x_n \left[\cos\left(k\frac{2\pi}{N}n\right)-isin\left(k\frac{2\pi}{N}n\right)\right] \qquad (8)$$

$$x_n=\sum_{k=0}^{N-1} X_k \left[\cos\left(k\frac{2\pi}{N}n\right)+isin\left(k\frac{2\pi}{N}n\right)\right] \qquad (9)$$

من المعروف أنه يمكن استخدام DFT للاستيفاء المثلثي، أي عملية إيجاد دالة معرفة على أنها مجموع الجيب وجيب التمام لفترات معينة، والتي تمر عبر مجموعة بيانات معينة[10].

$$\begin{cases} u(t) \\ v(t) \end{cases} \qquad t\in[0,2\pi].$$

يمكننا كتابتها في الشكل العقدي التالي $z(t)=u(t)+iv(t), t\in[0,2\pi]$

تمثل N مجموعة من النقاط تنتمي إلى المنحنى البارامتري والتي يمكن استخدامها لاحقًا في عمليات عددية مثل التكامل العددي. ثم نأخذ مجموعة من النقاط المتقطعة على هذا المنحنى لنعيد تكتبها بالشكل:

$$\begin{aligned} x &= \{u_0+iv_0, u_1+iv_1, \dots\dots u_{N+1}+iv_{N+1}\} \\ &= \{x_0, x_1, x_2, \dots\dots x_{N-1}\} \end{aligned}$$

باستخدام تحويل فورييه المنفصل (DFT) نحصول على معامل فورييه X_k الذي يشفر سعة وطور الموجة الجيبية بالتردد(k)، عندما يكون لدينا منحنى بارامتري نقوم بإعادة بنائه باستخدام نظام من الدورات(Epicycles)، لذلك نحن بحاجة إلى معرفة كيف يمكن تمثيله كمجموع من الموجات الجيبية (Sine/Cosine). وهذا يتم تحديده بثلاثة عناصر:

***Received**: 13-02-2026 - **Accepted**: 11-04-2026 - **Published**: 19-04-2026*

Alq J Sci. 2026;2(4):445-453
https://doi.org/10.69667/ajs.26408
Alqalam Journal of Science
مجلة القلم للعلوم
https://alqalam.utripoli.edu.ly/index.php/AR

• السعة(Amplitude): تحدد حجم الدائرة.

• التردد(Frequency): يحدد سرعة دوران الدائرة.

• الطور(Phase): يحدد نقطة البداية أو اتجاه الدوران.

هذه هي المعلومات الضرورية لإنشاء نظام من الدورات التي ستتبع المنحنى البارامتر[5]،[11].نصف قطر كل دائرة هو السعة X_k، يمكن حساب ذلك باستخدام الصيغة:

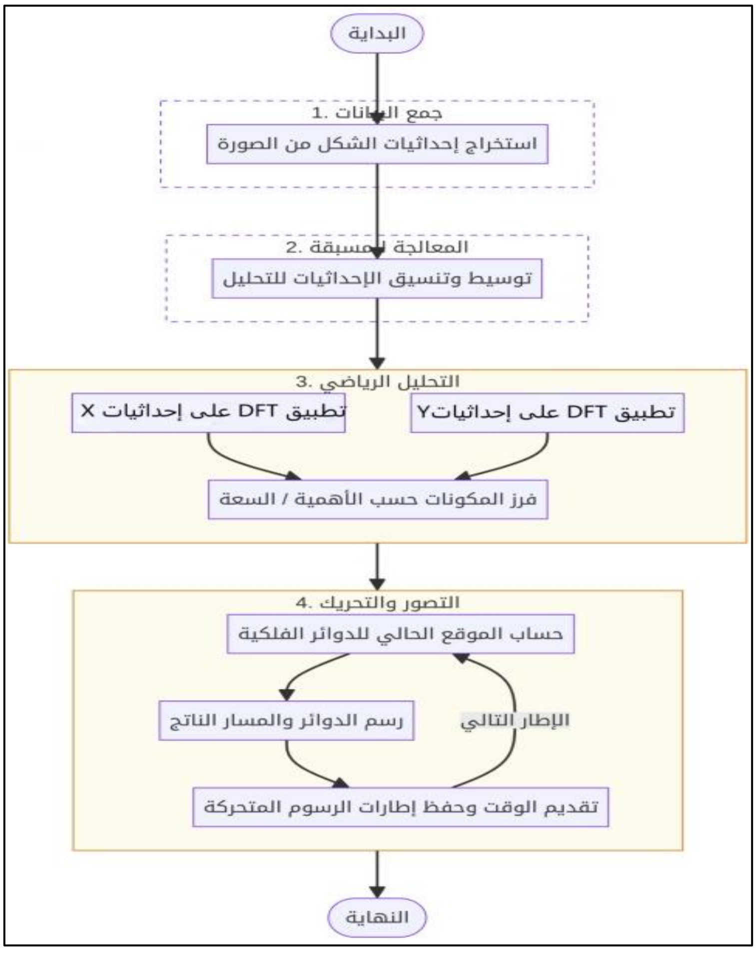
$$R_k = |X_k| = |\mathrm{Re}(\mathrm{X_k}) + i\ \mathrm{Im}(X_k)| = \sqrt{\left(\mathrm{Re}(\mathrm{X_k})\right)^2 + \left(\mathrm{Im}(X_k)\right)^2}$$

حيث $Re(\mathrm{X_k})$ و $Im(X_k)$ هما المكونان الحقيقيان والخياليان ل X_k، من ناحية أخرى فإن X_k للمرحلة هي:

$$\varphi_k = Arg(X_k) = \arctan\left(\frac{Im(X_k)}{Re(X_k)}\right)$$

الزاوية φ_k تعطي أتجاه النقطة بالنسبة للمحور الحقيقي، وهذا مفيد في دراسة الشكل الهندسي للمنحنى. كم تستخدم في المعالجة العددية عند تقريب المنحنيات أو بناء خوارزميات فهي تعتمد على الاتجاه (مثل تتبع الحدود في الصور).

مخطط الانسياب:



الشكل (2): يوضح المخطط الانسياب المستخدم في لغة(Python)

يصف الشكل(2) مخطط الانسياب لعملية الرسم باستخدام لغة البايثون، يمكننا كتابة معادلات بارامترية مثل $z(t) = u(t) + iv(t)$ أو تطبيق تحويل فورييه للحصول على المعاملات، ثم تحويلها إلى دوائر صغيرة (Epicycles) تتحرك معاً لتعيد رسم المنحنى. تتم العملية بخطوات من

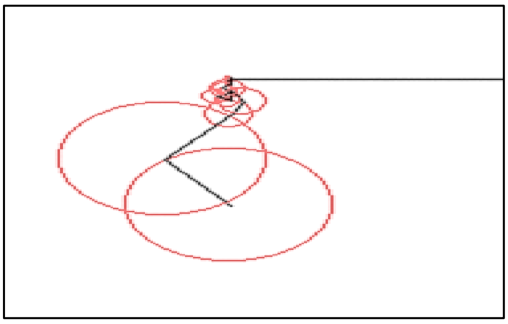
Received*: 13-02-2026 -* ***Accepted****: 11-04-2026 -* ***Published****: 19-04-2026*

Alq J Sci. 2026;2(4):445-453
https://doi.org/10.69667/ajs.26408
Alqalam Journal of Science
مجلـــة القلم للعلـوم
https://alqalam.utripoli.edu.ly/index.php/AR

جمع البيانات ومعالجتها ثم أدخال المعادلات السابق ذكرها في بعدين (x, y) فيتم رسم دوائر متعاقبة لتكون مجموعة من الرسوم يتم التخطيط لها مسبقا.

النتائج والمناقشات:

سوف نقوم باستخدام تحويلات فوربيه المنفصله(DFT) للرسم باستخدام مايسمى بالEpicycles يمكن من خلالها رسم أي شكل فني حيث يتم معاملة الشكل على أنه دالة مغلقة ويتم تغذية جميع أحداثياتها (x , y) إلى معادلات (DFT)، بدورها تنتج ما نحتاجه من معلومات حول (amp, freq, phase) لرسم الدوائر الصغيرة (Epicycles) التي تدور بسرعات مختلفة وتعيد بناء المنحنى الأصلي.

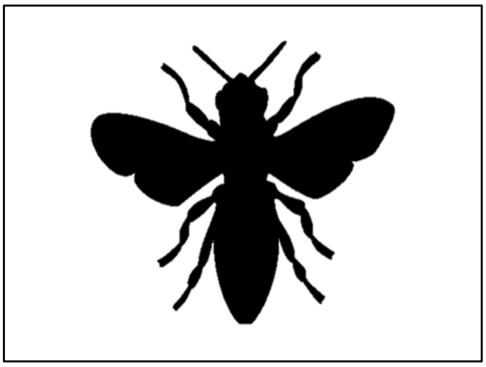


الشكل (3): يوضح كيفية عمل أفلاك التدوير في عملية الرسم

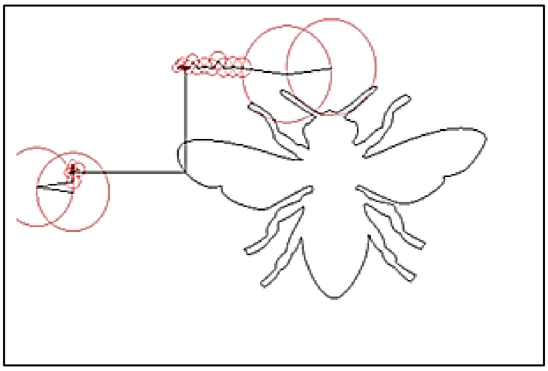
باستخدام متسلسلة فورييه فإن عدد حدود فورييهN يحدد مدى مطابقة الدالة المرسومة للدالة الأصلية. إذا اخترنا Nصغيرة فإن الرسم الناتج سيكون غير دقيق، وقد لايظهر التفاصيل الدقيقة للمنحنى.إذا زدت N فإن المنحنى الناتج من مجموع دوائر أفلاك التدوير (Epicycles) سيقترب أكثر من الشكل الأصلي حتى يطابقه. كلما زادت N زاد عدد دوائر(Epicycles) التي يجب رسمها، وبالتالي يصبح النظام أكثر دقة وتعقيدًا.

تطبيق 1 :

يتم اختيار الصورة المراد رسمها وإدخال الرابط الخاص بها إلى برنامج البايثون، ثم من خلال خوارزمية ذات مخطط انسياب تم الإشارة له مسبقاً يتم رسم الصورة بعملية تتداخل فيها أفلاك التدوير بصورة متناغمة كما في الشكل(3).



الشكل(4): الصورة التي تم ادخالها

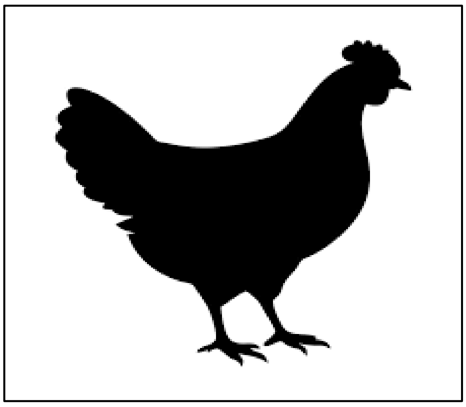


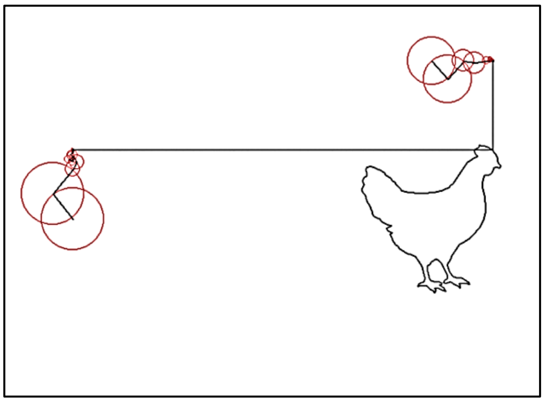
الشكل(5): الصورة التي تم رسمها بإستخدام لغةPython

***Received**: 13-02-2026 - **Accepted**: 11-04-2026 - **Published**: 19-04-2026*

Alq J Sci. 2026;2(4):445-453
https://doi.org/10.69667/ajs.26408
Alqalam Journal of Science
مجلة القلم للعلوم
https://alqalam.utripoli.edu.ly/index.php/AR

تطبيق 2 :

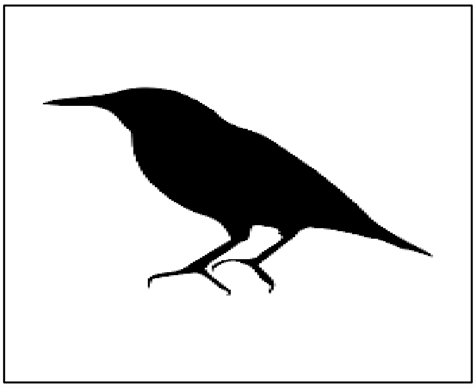


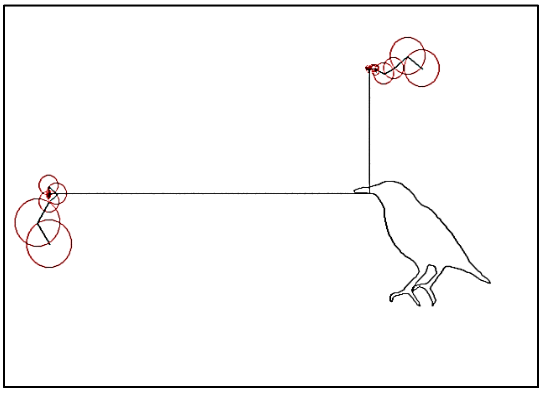


الشكل(6): الصورة التي تم ادخالها

الشكل(7): الصورة التي تم رسمها بإستخدام لغةPython

تطبيق 3:

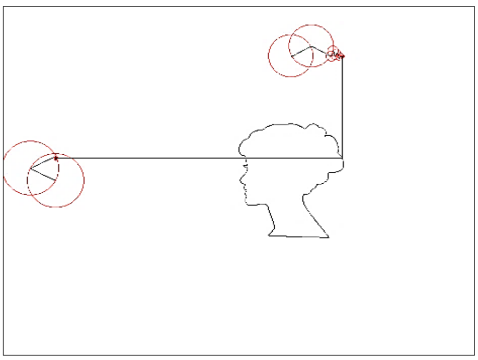


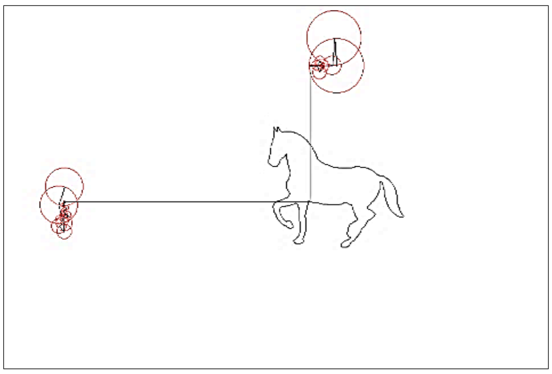


الشكل(8): الصورة التي تم ادخالها

الشكل(9): الصورة التي تم رسمها بإستخدام لغةPython

من التطبيقين السابقيين يتضح لنا كيفية استخدام(Discrete Fourier transform) في عملية رسم الدوال باستخدام(epicycles) وقدرته على رسم أي دالة بغض النظر عن التعقيدات الموجوده بها، لتوضيح قدرة هذه التحويلات أكثر أنظر للأشكال التالية:





الشكل(10): عملية الرسم بواسطة لغةPython

الشكل(11): عملية الرسم بواسطة لغةPython

***Received**: 13-02-2026 - **Accepted**: 11-04-2026 - **Published**: 19-04-2026*

Alq J Sci. 2026;2(4):445-453
https://doi.org/10.69667/ajs.26408

Alqalam Journal of Science
مجلة القلم للعلوم
https://alqalam.utripoli.edu.ly/index.php/AR

الاستنتاج :

تم في هذه الورقة استخدامنا معادلات تحويل فورييه المنفصل من خلال إدخالها كمعطيات للغة البايثون في محاولة لتسخير أحد أهم لغات البرمجة وعلم الرياضيات في رسم عدد من الرسوم الفنية، وكانت النتائج مطابقة بشكل كبير للتطبيقات المعطاه وخصوصا عند استخدام جميع قيمN في التحويل. إن هذا يؤكد أهمية لغات البرمجة ويفتح العديد من المجالات لاستخدامها مستقبلا حيث تعمل قوة البرمجة الرياضية والرسومية على توليد أشكال هندسية أو فنية خصوصا عندما تدعم بمادة علمية ورياضية مناسبة.

التوصيات:

1. إدخال لغة python في تدريس الرياضيات داخل الجامعات .
2. استخدام لغات أخرى مثل لغة (C) وغيرها في عمليات الرسم .
3. التعمق في تدريس متسلسلة فورييه وتحويلاتها لما لها من أثر علمي وعملي.

المراجع:

1. Knobel EB, Ptolemy's catalogue of stars: a revision of the Almagest. Washington (DC): Carnegie Institution of Washington; 1915. (Carnegie Institution of Washington Publication No: 86).
2. Moritz H. Epicycles in modern physics. Berlin: Leibniz-Sozietät; 2003.
3. Oppenheim AV, Willsky AS, Nawab SH. Signals & systems. 2nd ed. Upper Saddle River (NJ): Pearson Educación; 1997.
4. Strang G. Introduction to linear algebra. 6th ed. Wellesley (MA): Wellesley-Cambridge Press; 2022.
5. Ponce Campuzano JC. Tracing closed curves with epicycles: a fun application of the discrete Fourier transform. North Am GeoGebra J. 2023;11(1):1-14.
6. Birmanns JP. Creating multidimensional drawings with epicycles [place unknown: publisher unknown; date unknown].
7. Stein EM, Shakarchi R. Fourier analysis: an introduction. Princeton (NJ): Princeton University Press; 2011. (Princeton Lectures in Analysis; vol. 1).
8. Brigham EO. The fast Fourier transform and its applications. Englewood Cliffs (NJ): Prentice-Hall, Inc.; 1988.
9. Azad K. An interactive guide to the Fourier transform [Internet]. Better Explained; [cited 2022 Oct 25]. Available from: https://betterexplained.com/articles/an-interactive-guide-to-the-fourier-transform/
10. Ponce Campuzano JC. Trigonometric interpolation using the discrete Fourier transform. North Am GeoGebra J. 2022;10(1):1-13.
11. Izaac J, Wang J. The Fourier transform. In: Computational quantum mechanics. Cham (CH): Springer International Publishing; 2019. p. 309-356.
12. Muqri MR, Wilson EJ, Shakib J. A taste of Python–discrete and fast Fourier transforms. Paper presented at: 2015 ASEE Annual Conference & Exposition; 2015 Jun 14-17; Seattle, WA.

Received*: 13-02-2026 -* ***Accepted****: 11-04-2026 -* ***Published****: 19-04-2026*