Alq J Sci. 2025;1(2):147-156
https://doi.org/10.69667/ajs.25204

Alqalam Journal of Science
مجلــة القلم للعلــوم
https://alqalam.utripoli.edu.ly/index.php/AR

إستكمال البيانات بإستخدام الطرق المتعددة الحدود والشريحة التكعيبية

نوال عمر احمد ابودرة

قسم الرياضيات، كلية التربية ابي عيسى، جامعة الزاوية

nwal1991a@gmail.com

الملخص

هدف هذا البحث لتوضيح المفاهيم الأساسية في التحليل العددي بصورة عامة، ثم تطرق لموضوع أساسيات الاستكمال حيث أنه ينقسم إلى استكمال عام واستكمال متقطع وتناول بعض طرق إيجاد الاستكمال العام وصيغة الخطأ في هذه الطرق فوجد أن الاستكمال بطرق لاجرانج ونيوتن الأمامية والخلفية وهيرمت تتم فيهم تقريب البيانات باستخدام كثيرات الحدود التي تمر منحنياتها بكل النقاط المعطاة وبالتالي فكثيرة الحدود الناتجة تكون ذات رتب عليا وطبيعة كثيرات الحدود من الرتب العليا متذبذبة فكلما زادت درجة كثيرة الحدود زاد التذبذب وهذا يحد من استخدامها، فكان من الأفضل استخدام الشريحة التكعيبية لضمان استمرارية اتصال الحدودية المستكملة (الاستكمال المتقطع)، وقد تمت دراستها فوضح مفهومها وكيفية بنائها وأنواعها ودعم ذلك بالأمثلة والنظريات.

الكلمات الدالة: البيانات، الطرق المتعددة الحدود، الشريحة التكعيبية.

Abstract

This research aims to clarify the basic concepts of numerical analysis in general. It then addresses the basics of interpolation, which is divided into general interpolation and discrete interpolation. It also discusses some methods for finding general interpolation and the error formula for these methods. It was found that interpolation using the Lagrange, Newton, backward, and Hermite methods approximates data using polynomials whose curves pass through all given points. Therefore, the resulting polynomial is of higher order. Higher-order polynomials are oscillatory in nature; the higher the degree of the polynomial, the greater the oscillation. This limits their use. Therefore, it would be preferable to use a cubic spline to ensure the continuity of the interpolated polynomial (discrete interpolation). The study explained its concept, construction, and types, supporting this with examples and theories.

المقـدمة:

تُعد مشكلة نقص البيانات وعدم اكتمالها من أبرز التحديات التي تواجه الباحثين في مختلف المجالات العلمية والتطبيقية، حيث قد تكون بعض القيم غير دقيقة أو مفقودة تمامًا، مما يعيق الوصول إلى نتائج صحيحة ودقيقة. وللتغلب على هذه الإشكالية، ظهرت العديد من الأساليب الرياضية والعددية التي تهدف إلى استكمال البيانات المفقودة بطرق تقريبية دقيقة وفعّالة. ويأتي التحليل العددي كأداة أساسية لمعالجة هذه القضايا، من خلال توفير تقنيات متعددة مثل أساليب الاستيفاء باستخدام المتعددة الحدود والشريحة التكعيبية، والتي تتيح تقدير القيم المفقودة بطريقة سلسة ودقيقة. وتعتمد هذه الأساليب على مفاهيم رياضية أساسية كالاتصال، الاشتقاق، وجذور المعادلات، مع الأخذ بعين الاعتبار مصادر الأخطاء المحتملة سواء كانت مطلقة أو نسبية. ومن هذا المنطلق، يهدف البحث الحالي إلى إبراز أهمية استكمال البيانات عبر توظيف طرق الاستيفاء المتعددة الحدود والشريحة التكعيبية، باعتبارها من أكثر الطرق شيوعًا وفاعلية في الوصول إلى تقديرات عددية دقيقة، مما يسهم في تحسين جودة النتائج ويوفر أساسًا متينًا للتطبيقات العملية في العلوم والهندسة.

طرق حل أنظمة المعادلات:

هناك عدة طرق لإيجاد حلول المعادلات الخطية والتي تصنف إلى نوعين:

أ- الطرق المباشرة : هي الطرق التي تؤدي إلى الحل المضبوط للأنظمة بعد عدد محدد من العمليات الحسابية البسيطة .

***Received**: 02-07-2025 - **Accepted**: 01-09-2025 - **Published**: 09-09-2025*

Alq J Sci. 2025;1(2):147-156
https://doi.org/10.69667/ajs.25204

Alqalam Journal of Science
مجلــة القلم للعلـوم
https://alqalam.utripoli.edu.ly/index.php/AR

ب- الطرق الغير مباشرة (تكرارية): وهي الطرق التي تبدأ بتقريب إبتدائي (أولي) ثم بإتباع خوارزمية مناسبة تؤدي إلى تقريبات أفضل حيث يتم فيها تكرار الخطوة أكثر من مرة حتى نتحصل على الدقة المطلوبة. في هذا البند سنكتفي بدراسة الطرق المباشرة التي تنقسم إلى عدة طرق (طريقة جاوس للحذف الأمامية – طريقة جاوس للحذف الخلفية – طريقة جاوس جوردان) نأخذ منها طريقة جاوس للحذف الخلفية فقط.

طريقة جاوس للحذف: هذه الطريقة نستخدم عمليات تحويلات أولية علي المصفوفة A بجعلها مصفوفة مثلثيه عليا، وأن التحويلات الأولية الخاصة بالصفوف تسمي تحويلات صفية أولية .

$$(\boldsymbol{i})\ \ \boldsymbol{R_r \leftrightarrow R_s\,; r \neq s}\ \ \text{،}\boldsymbol{r}\text{،}\boldsymbol{s\ are\ numbers}$$

$$(\boldsymbol{ii})\boldsymbol{R_r \rightarrow kR_r\,; k}\ \ \textbf{is constant}$$

$$(\boldsymbol{iii})\ \boldsymbol{R`_i \rightarrow R_i + TR_k}\ \ ;\ \ \boldsymbol{T = \frac{-a_{ik}}{a_{kk}}}$$

وعمليات التحويل لا تؤثر علي درجة المصفوفة و رتبتها .

نظرية : إذا كانت A مصفوفة مربعة $(n \times n)$ فإن العبارات التالية كلها متكافئة :

أ- النظام المتجانس $AX = 0$ ليس له الا الحل التافه $X = 0$.

ب- لكل متجه b يعطي في الطرف الايمن، فإن النظام $AX = B$ له حل.

ج- المصفوفة A قابلة للانعكاس.

نظرية : إذا كانت المصفوفة A قطعية السيطرة القطرية أي أن :

$$|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} |a_{ij}| \quad \text{،} \qquad \forall\, i = 1\text{،}2 \cdots n$$

فإن المصفوفة A تكون غير شاذة، وإذا كانت المصفوفة المحورة A^{t} قطعية السيطرة القطرية فإن المصفوفة A تكون أيضا غير شاذة.

تقريب الدالة بحدودية : تعتبر مسألة تقريب دالة بدول الأبسط لها فائدتان رئيسيتان :

أولهما: حين نستبدل بدالة معقدة دالة أبسط فإن ذلك يسهل إجراء بعض العمليات التي نحتاج إليها كالمفاضلة والمكاملة .

الفائدة الثانية: هي الاستكمال من الجداول وهذه ما سنتعرف عليه لاحقا حيث يمكن استخدام عدة دوال للتقريب مثل كثيرات الحدود (الحدوديات) والدوال المثلثية والدوال الأسية والدوال النسبية ، ولكن أكثر هذه الدوال استخداما للتقريب هي الحدوديات .

تعريف الحدودية : تسمي الدالة التي على الشكل:

$$p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots\ldots + a_nx^n$$

بدالة متعددة الحدود (Polynomial) وتعرف أحيانا بإسم كثيرة الحدود وأحيانا بالحدودية ؛ وتسمي n هنا بدرجة هذه الدالة درجة الحدودية. مسألة

تقريب دالة ما بحدودية :إذا أعطينا دالة ما $f(x) = y$ عند بعض النقاط: $x_i\ ; i = 0\text{،}1\text{،}2 \cdots\cdot n$ ؛ أي أن القيم $y_i =$ $f(x_i)$، $i = 1\text{،}2\text{،} \cdots\cdot n$ ، أصبحت معلومة لدينا ثم طلب منا تعيين قيمة الدالة y عند نقطة $\hat{x}$ غير موجودة في جدول القيم المعلومة المعطاة.

طريقة حل تلك المسألة :

نقرب الدالة $f(x)$ بحدودية $p(x)$ من الدرجة n بحيث تنطبق قيم الحدودية p مع قيم الدالة f عند النقاط x_i ،$i =$ $0\text{،}1\text{،}2 \ldots.n$، أي أن : $p(x_i) = f(x_i)$ ،$i = 0\text{،}1\text{،}2 \ldots.n$

Received*: 02-07-2025 -* ***Accepted****: 01-09-2025 -* ***Published****: 09-09-2025*

Alq J Sci. 2025;1(2):147-156
https://doi.org/10.69667/ajs.25204

Alqalam Journal of Science
مجلـــة القلم للعلـوم
https://alqalam.utripoli.edu.ly/index.php/AR

ثم نستخدم هذه الحدودية لتعيين القيمة $p(x)$ ونعتبر أن قيمة الدالة f المطلوبة عند النقطة $\hat{x}$ مساوية لهذه القيمة أي أن :

$$f(\hat{x}) = p(\hat{x})$$

وتسمى هذه الطريقة بالاستكمال .

نظرية فاين ستراس للتقريب:- إذا كانت الدالة $f(x)$ معرفة و مستمرة علي الفترة $[a،b]$ فإنه لأي قيمة معطاه صغيرة جدا أكبر من الصفر $(\epsilon > 0)$ توجد حدودية $p(x)$ معرفة على نفس الفترة $[a،b]$ بالخاصية التالية:

$$|f(x) - p(x)| < \epsilon \; ; \; \forall\, x \in [a،b]$$

مفهوم الاستكمال: الاستكمال هو عملية إيجاد قيمة y عند قيمة معلومة x ليست موجودة في جدول النقاط المعطاة .

بمعني آخر: يقصد أيضا بالاستكمال الاستظهار أو التنبؤ أو استيفاء القيم أي إيجاد قيم الحدود المجهولة التي تتوسط جملة حدود معلومة من متتالية معينة، بمعني أعم: إذا علمت لمتغير ما جملة قيم تناظر جملة قيم أخري لمتغير أخر فعملية استظهار أو استيفاء القيم هي إيجاد قيم المتغير الثاني التي تناظر قيم المتغير الأولي التي تتوسط قيم معلومة .

أنواع الاستكمال:

أ- استكمال داخلي : يكون هذا الاستكمال إذا كانت النقطة المطلوب عندها الاستكمال داخل نقاط الجدول المعطاة .

ب- استكمال خارجي : إذا كانت النقطة المطلوب عندها الاستكمال خارج نقاط الجدول المعطاة.

ج- استكمال عكسي : يتضمن حساب هذا الاستكمال قيمة الدليل x الذي يناظر قيمة معطاة ل $f(x)$ بفرض أن قيم y_i معلومة $i = 0،1،2 \dots . n$.

حالات الاستكمال:

الاستكمال الخطي(Linear interpolation) :

إذا كانت : $\boldsymbol{p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots\dots + a_nx^n}$، دالة متعددة الحدود (حدودية) فإن عملية إيجاد متعددة حدود من الدرجة الأولي هو استكمال خطي أي في حالة (درجة الحدودية $\boldsymbol{n = 1}$) فإن $\boldsymbol{P(x)}$ تمثل هندسيا خط مستقيم حيث يكفي لتحديد الخط المستقيم نقطتان يمر بهما ويسمي في هذه الحالة بخط الاستكمال وصورته العامة :

$$\boldsymbol{p(x) = a_0 + a_1x}$$

أصناف الاستكمال:

الاستكمال العام: لتكن لدينا مجموعة مكونة من $n + 1$ نقطة عندئذ يعتمد هذا الاستكمال علي إيجاد حدودية من الدرجة n بحيث يمر منحنى هذه الحدودية من جميع النقاط المفروضة ، وهذا ما سنتناوله في الفصل الثاني.

الاستكمال القطعي (التجزيئي): يعتمد هذا الاستكمال على بناء حدودية من درجة أدنى بين كل زوج من نقاط البيانات المعلومة.

الاستكمال العام:

هو مفهوم رياضي وإلا مع حدودية وتمثل مجموعة من النقاط المعطاة، وهي من الأدوات الأساسية في تحليل البيانات وتطبيقات الرياضيات. يعتمد هذا النوع من الاستكمال على فكرة أن المنتمي يمكن أن يمر عبر جميع نقاط المعطاة من الدرجة عليا، حيث كلما زادت عدد النقاط الحدودية المستكملة.

***Received**: 02-07-2025 - **Accepted**: 01-09-2025 - **Published**: 09-09-2025*

Alq J Sci. 2025;1(2):147-156
https://doi.org/10.69667/ajs.25204
Alqalam Journal of Science
مجلة القلم للعلوم
https://alqalam.utripoli.edu.ly/index.php/AR

يسعى هذا المفهوم في الرياضيات بشكل واسع في مجالات متنوعة مثل الإحصاء، والفيزياء، والهندسة، حيث يركز التقرير الرياضي والممارسون على إيجاد تحليل رياضي دقيق ودقيق. من خلال استخدام تقنيات مثل الماركات المتعددة، يمكن للعلماء والمهندسين إنشاء نماذج إسلامية رائدة للتوجهات الإلكترونية أو التوجهات الاجتماعية حيث تتطلب عملية استكمال العام تحليلًا دقيقًا، وفهمًا عميقًا للعلاقات بين الجريمة، وعندما يتم التعامل مع عدد كبير من النقاط، يصبح من الضروري استخدام مجموعة عليا من الحدود، مما يزيد من خطر النموذج ويتيح تمثيلاً أكثر وضوحاً ومع ذلك، يجب التركيز على مهمة التركيز في التخصيص، حيث يمكن أن يؤدي استخدام البرنامج التنفيذي إلى قدر كبير من القدرة على التعميم.

طرق الاستكمال:

حدودية لاجرانج الاستكمالية (Polynomial Lagrange Interpolationg): ليكن لدينا النقاط المختلفة x_0 ، x_1 ،x_2، ... ... ،x_n وعددها $(n+1)$ نقطة على المحور الحقيقي وأن $f(x)$ *دالة حقيقية معرفة على فترة ما* $[a،b]$ *تشتمل هذه النقاط فإننا نستطيع تكوين حدودية من درجة أقل من أو تساوي* n *يمر منحناها بكل النقاط المذكورة عن طريق حدودية لاجرانج والتي تكون صيغتها العامة هي :*

$$L_n^{(k)}(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)\cdots\cdots(x-x_n)}{(x_k-x_0)(x_k-x_1)(x_k-x_2)\cdots\cdots(x_k-x_n)}$$

حيث $\boldsymbol{n}$ تمثل درجة الحدودية والتي تساوي عدد قيم $\boldsymbol{x}$ مطروح منها واحد ، $\boldsymbol{k = 0،1، \ldots .، n}$ والفروق المحسوبة في المقام تتجنب $(\boldsymbol{x_k - x_k})$ وفي البسط تتجنب $(\boldsymbol{x - x_k})$ ويمكن كتابة الصيغة السابقة على الصورة:

$$\boldsymbol{L_n^{(k)}(x) = \prod_{\substack{i=0\\ i\neq k}}^{n} \frac{(x-x_i)}{(x_k-x_i)}}$$

إي ان هناك حدودية من درجة $(\boldsymbol{n})$، $\boldsymbol{L_n^k(x)}$ *لكل نقطة من نقاط البيانات البالغ عددها* $(\boldsymbol{n+1})$ *والتي* تكون حدودية الاستكمال *كالتالي:*

$$y = y_0L_n^{(0)}(x) + \ y_1L_n^{(1)}(x) + \ y_2L_n^{(2)}(x) \ldots \ldots + \ y_nL_n^{(n)}(x)$$

أو بصورة مختصرة :

$$y = \sum_{i=0}^{n} y_i \, L_n^{(i)}(x)$$

نلاحظ إن المتغير المستقل $\mathbf{x}$ يكون حدوديات لاجرانج التي لها درجة ثابتة $\mathbf{n}$ وهي عدد نقاط الجدول مطروحاً منه واحد أما المتغير التابع $\mathbf{y}$ في الجدول فيظهر في صيغة الاستكمال، ولحساب الفروق الظاهرة في بسط ومقام حدوديات لاجرانج نستخدم الجدول التالي:

***Received**: 02-07-2025 - **Accepted**: 01-09-2025 - **Published**: 09-09-2025*

Alq J Sci. 2025;1(2):147-156
https://doi.org/10.69667/ajs.25204
Alqalam Journal of Science
مجلـــة القلم للعلـوم
https://alqalam.utripoli.edu.ly/index.php/AR

X	$(x_i - x_0)$	$(x_i - x_1)$	$(x_i - x_2)$	....	$(x_i - x_n)$
x_0	$(x - x_0)$	$(x_0 - x_1)$	$(x_0 - x_2)$	....	$(x_0 - x_n)$
x_1	$(x_1 - x_0)$	$(x - x_1)$	$(x_1 - x_2)$	....	$(x_1 - x_n)$
x_2	$(x_2 - x_0)$	$(x_2 - x_1)$	$(x - x_2)$	....	$)(x_2 - x_n$
....	....	....	....	....	....
x_n	$(x_n - x_0)$	$(x_n - x_1)$	$(x_n - x_2)$	....	$(x - x_n)$

وفي هذا الجدول لا يتم حساب عناصر القطر الرئيسي في مصفوفة الفروق، ثم من الجدول مباشرة نحسب حدوديات لاجرانج كالاتي:

$$L_n^{(0)}(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) \cdots\cdots (x - x_n)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)(x_0 - x_3) \cdots\cdots (x_0 - x_n)}$$

$$L_n^{(1)}(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_2)(x - x_3) \cdots\cdots (x - x_n)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)(x_1 - x_3) \cdots\cdots (x_1 - x_n)}$$

وهكذا نحسب :

$$L_n^{(n)}(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) \cdots\cdots (x - x_{n-1})}{(x_n - x_0)(x_n - x_1)(x_n - x_2) \cdots\cdots (x_n - x_{n-1})}$$

طريقة لاجرانج طريقة عامة للاستكمال بمعنى أنها تستعمل سواء كانت الفروق بين بيانات المتغير المستقل x ثابتة (متساوية) ام غير متساوية.

طريقة نيوتن الأمامية (Newton Forward Method): تستعمل هذه الطريقة في حالات تساوي الفروق بين قيم المتغير المستقل للبيانات ، ولابد أولا من حساب جدول يسمي الفروق الامامية Δ وفيها يكون :

$$\Delta y_i = y_{i+1} - y_i$$

ونلاحظ أن الفروق الأمامية سينتهي إلي $\Delta^n y_0$. وهذا الجدول هو ما يصلح لصيغه نيوتن

x	y	Δ	Δ^2	Δ^3	..	Δ^n
x_0	y_0	$\Delta y_0 = y_1 - y_0$	$\Delta^2 y_0 = \Delta y_1 - \Delta y_0$	$\Delta^3 y_0 = \Delta^2 y_1 - \Delta^2 y_0$	..	
x_1	y_1	$\Delta y_1 = y_2 - y_1$	$\Delta^2 y_1 = \Delta y_2 - \Delta y_1$	$\cdots$	..	$\Delta^n y_0$
x_2	y_2	$\Delta y_2 = y_3 - y_2$	$\cdots$	$\cdots$	..	
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\Delta^3 y_{n-3} = \Delta^2 y_{n-2} - \Delta^2 y_{n-3}$		
x_n	y_{n-}	$\cdots$	$\Delta^2 y_{n-2} = \Delta y_{n-1} - \Delta y_{n-2}$			
x_n	y_n	$\Delta y_{n-1} = y_n - y_{n-1}$				

Received*: 02-07-2025 -* ***Accepted****: 01-09-2025 -* ***Published****: 09-09-2025*

Alq J Sci. 2025;1(2):147-156
https://doi.org/10.69667/ajs.25204
Alqalam Journal of Science
مجلـــة القلم للعلـوم
https://alqalam.utripoli.edu.ly/index.php/AR

التي تأخذ التعبير الرياضي:

$$p_n(x) = y_0 + \frac{\alpha}{1!}\Delta y_0 + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}\Delta^3 y_0 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots\ldots(\alpha-n+1)}{n!}\Delta^n y_0$$

حيث: $\boldsymbol{h = x_i - x_i}$ ، $\boldsymbol{\alpha = \frac{x-x_0}{h}}$

حــالات خــاصة:

1- $\boldsymbol{f(x) = P_1(x)}$: حدودية درجة أولي (الاكتفاء بفروق الدرجة الأولي):

$$p_1(\mathrm{x}) = y_0 + \frac{\alpha}{1!}\Delta y_0$$

1- $\boldsymbol{f(x) = p_2(x)}$: حدودية درجة ثانية (الاكتفاء بفروق الدرجة الثانية) :

$$p_3(x) = y_0 + \frac{\alpha}{1!}\Delta y_0 + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}\Delta^2 y_0 = p_1(x) + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}\Delta^2 y_0$$

1- $\boldsymbol{f(x) = p_3(x)}$: حدودية درجة ثالثة (الاكتفاء بفروق الثالثة) :

$$p_3(x) = y_0 + \frac{\alpha}{1!}\Delta y_0 + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}\Delta^3 y_0 = p_2(x) + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{6}\Delta^3 y_0$$

ملاحظــة:

i. لا تستعمل طريقة نيوتن الأمامية إلا في حالة تساوي الفروق بين المتغير المستقل في الجدول ، أي عندما تكون $h = x_i - x_{i-1}$ حيث h ثابت .

ii. يمكننا إيجاد صيغ تقريبية للاستكمال ، فيمكننا حساب $p_1(x)$ أو $p_2(x)$ أو $p_3(x)$ ، وكلما أردنا تحسين القيم حسبنا الحدودية ذات الدرجة الأعلى . هذا يتوفر بالطبع في حدوديات لاجرانج .

iii. لحساب $p_k(x)$ *يتم إضافة حد جديد لما تم حسابة من قبل (وهو* $p_{k-1}(x)$*) و بالتالي يقل مجهود* الحساب عند التحسين و أخد نقاط جديدة في الاعتبار، وعند إضافة نقطة جديدة واحدة إلي البيانات في طريقة لاجرانج تجعلنا نعيد الحسابات كلها لحساب حدوديات لاجرانج من جديد.

هذه الطريقة تكون دقيقة كلما كانت نقطة الاستكمال المطلوبة قريبة من x_0 (في النصف الأولي من الجدول).

وبالتالي عند $\boldsymbol{x = 0.22}$ ، وجدول الفروق المستخدم لهذه الطريقة يسمى جدول الفروق الخلفي وهي فروق من الدرجة الأولي والثانية والثالثة ... وهكذا ، كما هو مبين:

***Received**: 02-07-2025 - **Accepted**: 01-09-2025 - **Published**: 09-09-2025*

Alq J Sci. 2025;1(2):147-156
https://doi.org/10.69667/ajs.25204
Alqalam Journal of Science
مجلـــة القلم للعلـوم
https://alqalam.utripoli.edu.ly/index.php/AR

x	y	∇	∇^2	∇^3	$\cdots$	∇^n
x_0	y_0	$\nabla y_1 = y_1 - y_0$	$\nabla^2 y_2 = \nabla y_2 - \nabla y_1$	$\nabla^3 y_3 = \nabla^2 y_3 - \nabla^2 y_2$	$\cdots$	
x_1	y_1	$\nabla y_2 = y_2 - y_1$	$\nabla^2 y_3 = \nabla y_3 - \nabla y_2$	$\cdots$	$\cdots$	$\nabla^n y_n$
x_2	y_2	$\nabla y_3 = y_3 - y_2$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\nabla^3 y_n = \nabla^2 y_n - \nabla^2 y_{n-1}$		
x_{n-1}	y_{n-1}	$\cdots$	$\nabla^2 y_n = \nabla y_n - \nabla y_{n-1}$			
x_n	y_n	$\nabla y_n = y_n - y_{n-1}$				

كثير الحدود لهيرمت(**Hermite**):

تعريف الدالة دون الأخذ بعين الاعتبار تساوي مشتقات كل من الدالة و كثير الحدود، عند تلك النقاط كثيرات الحدود التي تتساوي قيم مشتقاتها مع مشتقات الدالة عند نقاط تعريف الدالة تسمي (Osculating Polynomials) أي أن كثيرات الحدود من هذا النوع تحقق الشرطين:

أ- تساوي قيمة الدالة وقيمة كثير الحدود عند نقاط تعريف الدالة.

ب- تساوي قيم مشتقات الدالة وقيم مشتقات كثير الحدود عند نقاط تعريف الدالة أكثر أنواع(Osculating Polynomials) أهمية هي تلك التي تتساوي فيها قيمة المشتقة الأولي للدالة و المشتقة الأولي لكثير الحدود عند نقاط تعريف الدالة وتسمي كثيرات الحدود هذه بكثيرات الحدود لهيرمت، وحتى نستطيع ايجاد كثيرات الحدود لهيرمت فإننا ندخل متغيرا إضافيا يساعدنا بإدخال قيم مشتقة الدالة في عملية بناء كثير الحدود.

$$z_0 = x_0 \qquad f(z_0)$$

$$f(z_0,z_1) = f`(x_0)$$

$$z_1 = x_0 \qquad f(z_1) \qquad f(z_0,z_1,z_2) = \frac{f(z_1,z_2) - f(z_0,z_1)}{z_1 - z_0}$$

$$f(z_1,z_2) = \frac{f(z_2) - f(z_1)}{z_2 - z_1}$$

$$z_2 = x_1 \qquad f(z_2) \qquad f(z_1,z_2,z_3) = \frac{f(z_2,z_3) - f(z_1,z_2)}{z_3 - z_1}$$

$$f(z_2,z_3) = f`(x_1)$$

$$z_3 = x_1 \qquad f(z_3) \qquad f(z_0,z_1,z_2,z_3) = \frac{f(z_1,z_2,z_3) - f(z_0,z_1,z_2)}{z_3 - z_0}$$

Received*: 02-07-2025 -* ***Accepted****: 01-09-2025 -* ***Published****: 09-09-2025*

Alq J Sci. 2025;1(2):147-156
https://doi.org/10.69667/ajs.25204
Alqalam Journal of Science
مجلة القلم للعلوم
https://alqalam.utripoli.edu.ly/index.php/AR

$$\boldsymbol{H(x) = f(x_0) + f`(x_0)(x - x_0) + f(z_0،z_1،z_2)(x - x_0)^2 + f(z_0،z_1،z_2،z_3\ )(x - x_0)^2(x - x_1)}$$

الاستكمال المتقطع:

من خلال تقريب دوال عشوائية ضمن فترات مغلقة باستخدام كثيرات الحدود ولأن طبيعة كثيرات الحدود ذات الرتبة العليا متذبذبة ، ولأن هذا التذبذب ضمن جزء من الفترة يمكنه تحفيز تذبذبات كبيرة ضمن كامل المدى فذلك يحد من استخدامها ولتفادي ذلك يتم تقسيم الفترة الكلية إلي فترات جزئية وإنشاء كثيرة حدود (حدودية الاستكمال) مختلفة عند كل فترة جزئية ويسمي التقريب بدوال من هذا النوع بالتقريب التجزيئي بالحدوديات (التقريب لكثيرة حدود متقطعة) وأبسط تقريب بكثيرة حدود متقطعة هو استكمال داخلي خطي متقطع .

أنواع التقريب التجزيئي:

الاستكمال الخطي التجزيئي: يعد هذا النوع من الاستكمال أبسط أنواع التقريب التجزيئي ونحصل علية إذا استخدمنا حدودية من الدرجة الأولي والتي تتضمن ربط مجموعة متتابعة من نقاط البيانات:

$$\{\ (x_0\ ،f(x_0))،\ (x_1\ ،f(x_1))،\ \ \dots ،\ \ (x_n\ ،f(x_n))\}$$

الاستكمال التربيعي التجزيئي :إذا استخدمنا حدودية من الدرجة الثانية نحصل على هذا النوع من الاستكمال. عيوب النوعين السابقين من الاستكمال التجزيئي هو أننا لا نضمن تحقيق التفاضلية عند نقاط النهاية للفترات الجزئية بمعني أن دالة الاستكمال الداخلي ليست ملساء (ناعمة)، أي غير قابلة للتفاضل باستمرار في المفهوم الهندسي، وعادة ما يكون هذا الشرط مطلوب من الناحية الفيزيائية للمسالة ولذلك يجب أن تكون دالة التقريب قابلة للتفاضل باستمرار .

يمكن حل مشكلة التفاضلية لدالة الاستكمالية عن طريق الاستكمال بالحدوديات التكعيبية أو ما يسمي الاستكمال بالشريحة التكعيبية .

الاستكمال بالشريحة التكعيبية (Cubic Spline Interpolation):

مفهوم الاستكمال بالشريحة التكعيبية : التقريب التجزيئي بالحدوديات الذي يستخدم حدوديات تكعيبية بين كل نقطتين متتابعتين يسمي استكمالا بالشريحة التكعيبية ويعد من أفضل الطرق المستخدمة اليوم، ونظرا لأن الحدودية التكعيبية العامة تشتمل على أربع ثوابت.

$$S(x) = a + bx + cx^2 + dx^3،$$

تعريف الشريحة التكعيبية الاستكمالية:

إذا اعطينا دالة f معرفة علي الفترة $[a،b]$ ومجموعة أعداد :

$$= x_0 < x_1 < x_2 \dots < x_n = b$$

تسمي عقدا ، فإن الشريحة التكعيبية الاستكمالية S للدالة f تعرف بإنها دالة تحقق :

S حدودية تكعيبية – ترمز لها بالرمز S_j علي كل فترة جزئية :

$$[x_j،x_{j+1}]\ ،\ j = 0،1،2 \dots ،n - 1$$

S تتطابق قيمتها مع قيم الدالة f عند كل العقد أي أن :

$$S_j(x_j) = f(x_j)\ ،\ j = 0،1،2 \dots n$$

عند أي عقدة هي ملتقى فترتين جزئيتين :

Received: 02-07-2025 - Accepted: 01-09-2025 - Published: 09-09-2025

Alq J Sci. 2025;1(2):147-156
https://doi.org/10.69667/ajs.25204
Alqalam Journal of Science
مجلـــة القلم للعلـوم
https://alqalam.utripoli.edu.ly/index.php/AR

أ– تتطابق قيمتا الحدوديتين التكعيبيتين على هاتين الفترتين أي أن :

$$S_{j+1}(x_{j+1}) = S_j(x_{j+1}); j = 0،1،2، \ldots ،n-2$$

كما تتطابق قيمتي مشتقتي هاتين الحدوديتين التكعيبيتين أي أن :

$$S`_{j+1}(x_{j+1}) = S`_j(x_{j+1})\ ; j = 0،1،2، \ldots ،n-2$$

ج– وكذلك تتطابق قيمتا المشتقة الثانية لكل من هاتين الحدوديتين أي أن :

$$S``_{j+1}(x_{j+1}) = S``_j(x_{j+1})\ \ ; j = 0،1،2، \ldots ،n-2$$

4– تتحقق واحدة من المجموعتين التاليتين من شروط الحدودية (boundary conditions) الأكثر شيوعا :

أ– تنعدم المشتقة الثانية للشريحة S عند كل من العقدتين الأولى و الأخيرة أي أن :

$$``(x_0) = S``(x_n) = 0$$

ويسمي هذا الشرط الحد الحر (**free boundary**) .

ب– تتساوي قيمتا مشتقة الشريحة S ومشتقة الدالة f عند كل من العقدتين الأولي و الأخيرة أي أن :

$$S`(x_0) = f`(x_0)\ ;\ \ S`(x_n) = f`(x_n)$$

ويسمي هذا الشرط : الحد المثبت (**clamped boundary**) .

ويلاحظ أنه يمكن تعريف الشرائح التكعيبية بشروط حدود أخرى سنتناولها في هذا الباب لاحقا.

بناء الشريحة التكعيبية: وللحصول علي الشريحة التكعيبية الاستكمالية لدالة معطاة f يمكننا تطبيق الشرط المذكور في التعريف على الحدودية التكعيبية التالية لتعيين الثوابت $a_j،b_j،c_j،d_j$:

$$s_j(x) = a_j + b_j(x - x_j) + c_j(x - x_j)^2 + d_j(x - x_j)^3،$$
$$j = 0،1، \ldots ، n-1$$

$$S(x) = \begin{cases} S_0(x) & x \in [x_0،x_1] \\ S_1(x) & x \in [x_1،x_2] \\ & \vdots \\ S_{n+1}(x) & x \in [x_{n+1}،x_n] \end{cases}$$

أولا: واضح أن الشرط (1) متحقق بإختيارنا لصيغة S_j حيث أنها S حدودية تكعيبية :

$$S_j(x) = a_j + b_j(x - x_j) + c_j(x - x_j)^2 + d_j(x - x_j)^3$$

ثانيا: بتطبيق الشرط (2)

$$S_j(x_j) = f(x_j)،\quad j = 0،1،2، \ldots ،n$$

يؤدي إلى أن :

$$S_j(x_j) = a_j + b_j(x_j - x_j) + c_j(x_j - x_j)^2 + d_j(x_j - x_j)^3$$
$$S_j(x_j) = a_j = f(x_j)$$

Received: 02-07-2025 - **Accepted**: 01-09-2025 - **Published**: 09-09-2025

Alq J Sci. 2025;1(2):147-156
https://doi.org/10.69667/ajs.25204
Alqalam Journal of Science
مجلـــة القلم للعلـوم
https://alqalam.utripoli.edu.ly/index.php/AR

ثالثـا:

(أ)- بتطبيق الشرط (3)

$$S_{j+1}(x_{j+1}) = S_j(x_{j+1})\,; \quad j = 0،1،2، \dots ،n-2$$

$$\because S_{j+1}(x) = a_{j+1} + b_{j+1}(x - x_{j+1}) + c_{j+1}(x - x_{j+1})^2 + d_{j+1}(x - x_j)^3$$

$$\therefore S_{j+1}(x_{j+1}) = a_{j+1} + b_{j+1}(x_{j+1} - x_{j+1}) + c_{j+1}(x_{j+1} - x_{j+1})^2 + d_{j+1}(x_{j+1} - x_{j+1})^3 = a_{j+1}$$

الشريحة الطبيعية التكعيبية (Natural Cubic Spline) :

الشريحة الطبيعية هي الشريحة التي تحقق شرط الحد الحر $S``(x_0) = S``(x_n) = 0$ أي أن الشرط 4- أ المذكور سابقا في الشريحة التكعيبية، والنظرية التالية تشير إلي أن الشرط الحر إذا تحقق في التعريف الشريحة الطبيعية فإن النظام الخطي المذكور في المجاهيل c_j يكون له حل وحيد.

الشريحة التكعيبية المثبتة (Clamped Cubic Spline) :

هي الشريحة التكعيبية التي تحقق شرط الحد المثبت وهو تساوي قيمتا مشتقة الشريحة S ومشتقة الدالة f عند كل من العقدتين الأولي و الأخيرة إي أن :

$$S`(x_0) = f`(x_0)،\ S`(x_n) = f`(x_n)$$

نظرية: إذا كانت f معرفة عند $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ وقابلة للاشتقاق عند $a،b$ فإن ل f إستكمال داخليا متشابكا وحيدا للشريحة S عند النقاط $x_0،\ x_1،\ \cdots،\ x_n$ ، بمعني أن إستكمال داخليا للشريحة يحقق الشرط $S`(b) = f`(b)،\quad S`(a) = f`(a)$ للحدودية.

المراجع

أولا: المراجع العربية:

1. مجدى الطويل وحنفى الزهيرى(1999) مقدمة في التحليل العددى، دار النشر للجامعات، الطبعة الثانية.
2. عمر زرتي(1996) الطرق العددية بإستخدام فورتران،دار النشر في إنتربرنت ليميد، مالطا الطبعة الأولى.
3. ياسين أحمد الشبول(2014) التقنيات العددية(التحليل العددي)، مكتبة المجتمع العربي للنشر والتوزيع - عمان – الاردن ، الطبعة الثانية.
4. سعد المريمى(2009) مبادئ التحليل العددي مع البرمجة بلغتي (الفورتران وباسكال) .
5. إيان جاكس وكولون جد(1992)، ترجمة: علي محمد إبراهيم، ومحمد جابر علي النجار التحليل العددي، منشورات جامعة الفاتح، الطبعة الأولى.
6. فرانيس شيد ، ترجمة : محمد علي السمرى، مراجعة: د. راجى حليم مقار .ملخصات شوم نظريات ومسائل في التحليل العددي.
7. السماني عبد المطلب أحمد، وعوض الحاج علي، ومزمل موسى سعيد(2014)، التحسيب العددي باستخدام لغة الماثلاب، دار الجوهرة للنشر والتوزيع (مصر – القاهرة).

ثانيا: المراجع الاجنبية:

8. Numerical Analysis، Richard L. Burden، J. Douglas Faires، seventh edition، 2001.
9. Constrained Cubic Spline Interpolation for Chemical Engineering Application by CJC Kruger.

***Received**: 02-07-2025 - **Accepted**: 01-09-2025 - **Published**: 09-09-2025*